1055. レッノ Mixing Theorem ニ就テ

安西　廣忠（阪大學生）

Ω ヲ measure space, $m(\Omega) < +\infty$ トシマス。

實數 t ヲ parameter トスル Ω ノ上ノ measure preserving transformation T_t ノ集リが、ドンナ $-\infty < t, s < +\infty$ ニ對シテモ $T_{t+s} = T_t T_s$, $T_0 = I$ ヲ満足シテヰルトキ之等ノ作ル one-parameter linear group $\{T_t\}$ ノコトヲ流レトイヒ、t ヲ時間ト呼ブコトニシマス。

コヽニ I ハ identical transformation 即チ Ω ノ各点ヲ動カサナイ変換ヲ表シマス。

ナホ流レハ measurable ダトシマス。流レが measurable ダトイフノハ Ω ノドンナ measurable set A ニ對シテモ、$T_t p \in A$ トナル p ト t ノ pair (p, t) ノ作ル集合が Ω ト時間 (t) トノ product space $\Omega \times (t)$ ニ於テ両者ノ direct product measure

ニ関シテ measurable ニナルコトデス。

Ω ノ上デ定義セラレタ絶對値ノ自乗ガ積分可能ナ函數ノ作ル Hilbert space ヲ $\mathfrak{H}$ トシマストト，$f(p) \in \mathfrak{H}$ ニ対シテ $U_t f(p) = f(T_t p)$ ニヨッテ生ズル One-parameter unitary group $\{U_t\}$ ヲ次ノ形ニスペクトル分解スルコトガ出来マス。

$$U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, dE(\lambda)$$

又 measure preserving transformation T ニハ $Uf(p) = f(Tp)$ ニヨッテ生ズル unitary operator U ノスペクトル分解 $U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dF(\lambda)$ ガ對應シマス。

流レノ場合ニモ、変換ノ場合ニモ上掲ノスペクトル表示ニ於テ $\lambda = 0$ ガ単純固有値トナルトキニ流レ又ハ変換ガ ergodic デアルトイヒ，ergodic デ、シカモ 0 以外ニハ固有値ヲ持タナイトキニ mixture-type デアルトイヒマス。（$e^{i\lambda}$ ヲ固有値，λ ヲ固有振動数［Eigenfrequenz］ト呼ブノガ普通デアリマスガ、ココデハ λ ヲ固有値ト呼ブコトニシマス）　定義ハコレ位ニ致シマシテ

§1. 流レガ ergodic デアルタメニハ、構成分子トシテ一ツデモ ergodic ナ変換ヲ含メバ充分デアリマスガ少シ條件ヲ強メテ

$\boxed{\text{定理1}}$ Mixture type デアルタメノ條件ハ T。

以外ノ構成分子ガスベテ ergodic ニナルコトガ必要ニシテ且ツ充分デアル。

（証） マヅ流レ $\{T_t\}$ ガ mixture デナイトシマス。ソノトキハ

(i) $\lambda=0$ ガ単純固有値デナイカ。

(ii) $\lambda \neq 0$ ナル固有値ガ現ハレルカ。

ドチラカデス。

(i) ノトキハ $U_t f = f$ ナル Ω 全体デ常数デハナイ。$f \in \mathfrak{H}$ ガ存在シマスカラ、スベテノ $-\infty < t < +\infty$ ニ對シテ T_t ガ ergodic デナクナリ問題デアリマセン。

(ii) ノトキハ $U_t f = e^{i\lambda t} \cdot f$ ナル non-constant ナ $f \in \mathfrak{H}$ ガ存在シマス。

コンデ $t=\frac{2\pi}{\lambda}$ トオキマストト, $U_{2\pi/\lambda} f = f$ トナッテ $T_{2\pi/\lambda}$ ナル non-ergodic ナ分子ガ現ハレマス。

逆ニアル $a \neq 0$ ニ対シテ T_a ガ ergodic デナイトシマスト, $T_a(A)=A$, $0<m(A)<m(\Omega)$ トナル A ガ存在シマス。A ガ流レニ対シテ invariant デアレバ $\{T_t\}$ ハ ergodic デナクナリマスカラ或ル $b \neq a$ ニ對シテ $T_b(A) \neq A$ 〔嚴密ニ云ヘバ $m(T_b(A)-A)>0$〕トシテ宜シイ。

又, スベテノ t ニ對シテ $T_{t+a}(A)=T_t(A)$ ガ成立シマスカラ

$$m(T_t(A)\cdot A) = m(T_{t+a}(A)\cdot A) \neq m(T_{t+b}(A)\cdot A)$$

コノコトト流レノ measurability トカラ $m(T_t(A)\cdot A)$

ハ常數ニ非ザル t ノ連續週期函數デアルコトガ分リマス。A ノ Characteristic function ヲ $\chi_A(p)$ トスレバ

$$(U_{-t}\chi_A, \chi_A) = (\chi_A(T_{-t}(p)), \chi_A(p))$$
$$= (\chi_{T_t(A)}(p), \chi_A(p))$$
$$= \int_{\Omega} \chi_{T_t(A)\,A}(p)\,dm = m(T_t(A)\,A)$$

流レガ mixture デアレバ

$$\lim_{T-S\to\infty} \frac{1}{T-S}\int_S^T \left|(U_{-t}\chi_A, \chi_A) - (\chi_A^*, \chi_A)\right|^2 dt = 0$$

トナル筈デス。

[E. Hopf: Ergodentheorie, 36 頁, 定義 11,2]

(χ_A^*, χ_A) ハ常數，$(U_{-t}\chi_A, \chi_A)$ ハ連續週期函數デ而モ常數デハアリマセンカラ上記ノ式ハ成立シマセン。故ニ流レハ mixture デハナクナッタ。証明ハ終リマシタ。

次ニ group U_t ノ単位分解ト、group ノ構成分子 U_a ノ unitary operator トシテノ単位分解トノ関係カラ得ラレル二三ノ簡単ナ結果ニツイテ述ベルコトニシマス。

$$U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, dE(\lambda), \quad E(\lambda-0) = E(\lambda) \text{ for all } \lambda$$

$a > 0$ ノトキ

$$U_a=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda a}\,dE(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda}\,dE(\lambda/a)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{i\lambda}\,dE(\lambda/a)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{i\lambda}\,d\left\{E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}\right)-E\left(\frac{2n\pi}{a}\right)\right\}$$

$$=\int_{0}^{2\pi} e^{i\lambda}\,d\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}\right)-E\left(\frac{2n\pi}{a}\right)\right\}$$

$=U_a$ ノ unitary operator トシテノ単位分解ヲ $F(\lambda)$ トスレバ

$$U_a=\int_{0}^{2\pi} e^{i\lambda}\,dF(\lambda),\quad F(\lambda-0)=F(\lambda)$$

分解ノ一意性カラ

$$F(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}\right)-E\left(\frac{2n\pi}{a}\right)\qquad 0\leq\lambda\leq 2\pi$$

$$F(\lambda+0)-F(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}+0\right)-E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}\right)$$

特ニ $\lambda=0$ ト置ケバ

$$F(+0)-F(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{2n\pi}{a}+0\right)-E\left(\frac{2n\pi}{a}\right)$$

ヲ得マス。

$a<0$ ノトキハ

$$F(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{2n\pi}{a}\right)-E\left(\frac{2n\pi+\lambda}{a}\right)\qquad 0\leq\lambda\leq 2\pi$$

トナリマス。然シコノトキノ $F(\lambda)$ ハ右カラ連續即チ

$F(\lambda+0)=F(\lambda)$ ナル単位分解デス。

コノトキハ

$$F(\lambda)-F(\lambda-0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{2n\pi+\lambda}{a}+0\right)-E\left(\frac{2n\pi+\lambda}{a}\right)$$

トナリマス。

故ニ次ノ関係式ヲ得マス。

$$(\alpha)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}+0\right)-E\left(\frac{\lambda+2n\pi}{a}\right)=\begin{cases} F(\lambda+0)-F(\lambda) & a>0 \text{ ノトキ} \\ F(\lambda)-F(\lambda-0) & a<0 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

$$(\beta)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{2n\pi}{a}+0\right)-E\left(\frac{2n\pi}{a}\right)=\begin{cases} F(+0)-F(0) & a>0 \text{ ノトキ} \\ F(0)-F(-0) & a<0 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

関係式 (β) カラ定理 1 ガ導ケルコトハ明瞭デス。

(α) ト (β) ニ着目スレバ定理 1 ヲ次ノヤウニ更ニ詳シクスルコトガ出来マス。

$\boxed{\text{系 1}}$　*mixture type* ノ流レ $\{T_t\}$ ノ T_0 以外ノ構成分子ハスベテ *mixture type* デアル。

$\boxed{\text{系 2}}$　流レガ *mixture type* ノ構成分子ヲ一ツデモ含メバ，流レハ *mixture type* トナル。

$\boxed{\text{系 3}}$　*ergodic* ナ流レ $\{T_t\}$ ガ，*ergodic* デナイ構成分子 T_a ヲ含メバ T_a ノ $\lambda=0$ ニ於ケル固有値ノ重複度ハ $+\infty$ デアル。

系3ハ *ergodic* ナ流レノ固有値ガ *modul* ヲ

非ルトイフコトハ(β)ナル式カラ出マス。

次ニ流レ$\{T_t\}$ガ ergodic デアルガ mixture デハナイ場合ヲ考ヘマス。コノトキノ$\{T_t\}$ノ固有値ノ作ル集合ヲ$\mathfrak{g}$トスレバ，ヨク知ラレテヰルヤウニ$\mathfrak{g}$ハ可附番デ且ツ modul ヲ作リマス。

$S=\gamma k$ (γハ有理数, $k\in\mathfrak{g}$) ナル形ノ S 全体ノ集リヲ$\mathfrak{a}$デ表シマスト，$\mathfrak{a}$ハ矢張リ modul ヲ作リ可附番デ、実軸上デ稠密ニナリマス。次ニ$\left\{\frac{2\pi}{s}\right\}$ $S\in\mathfrak{a}$ナル集合ヲ Z トシマスト Z ハ実数上ノ可附番稠密集合デス。

γヲ任意ノ有理数トスルトキ $a\in Z\to\gamma a\in Z$, $a\,\overline{\in}\,Z\to\gamma a\,\overline{\in}\,Z$ トイフヤウナ性質ヲモッテヰルコトハ明カデス。コノ Z ガ、流レノ non-ergodic ナ構成分子ノ parameter ノ作ル集合ニ外ナラナイワケデス。

今 $a\in Z$ トシマスト，$\frac{2\pi}{a}\in\mathfrak{a}$, $\frac{n}{m}\frac{2\pi}{a}\in\mathfrak{g}$

(コヽニ m, n ハ 0 ナラザル適當ナ整数)，$\mathfrak{g}$ガ modul

$$\to\frac{2n\pi}{a}\in\mathfrak{g}\to E\left(\frac{2n\pi}{a}+0\right)-E\left(\frac{2n\pi}{a}\right)\neq 0,$$

$$n\neq 0$$

コヽデ(β)ナル式ニヨリ T_a ガ non-ergodic ナ変換ニナルコトガ分リマス。全然今ノ証明ヲ逆ニ辿ルコトニヨッテ T_a ガ non-ergodic ナラバ $a\in Z$ ナルコトガ証明サレマス。

$\boxed{\text{定理2}}$ 流レ $\{T_t\}$ ガ ergodic デアレバ、ソノ構成分子デ non-ergodic ナモノハ唯一ツカ又ハ可附番デアル。後ノ場合ニハ non-ergodic ナ変換ハ ergodic ナ変換ノ間ニ一様ニバラ撒カレテ本ル。