1054. 超Poincaré空間ニ於ケル調和函數

小平 邦彦（東大）

筆者ハ超Fuchs群ニ關スル談話（第234号）ノ中デ非ユークリッド調和函數ナルモノヲ定義シ，コレニ關スル境界値問題ヲ提出シタガ，其ノ後コレハHodgeノ意味ノ調和函數ト一致スルコトガ分ッタ。[1)] 從ッテ境界値問題モHodgeノ一般論ニヨッテ解カレテキルコトニナル。然シ吾々ノ調和函數ニハ，空間ガ等質等方ナルコトニヨッテ，一般論デハ見出シ難イ性質ガ見ラレル。以下コレ等ノコトニツイテ述ベル。

§1. Greenノ定理. n次元超Poincaré空間ハ，定義ニヨレバ，長サガ1ヲ越エナイn次元複素vector $z=(z', -----, z^n)$ 全体カラ成ル空間デアッテ

$$(1,1) \quad ds^2 = \frac{|dz|^2}{1-|z|^2} + \frac{|(z\,dz)|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

ナル計量ヲモツ非ユークリッド空間デアル。

---

1) W. V. D. Hodge: Harmonic Functionals in a Riemannian Space, Proc. London Math. Soc. (2), 38 (1935), 72–95;
The excistence Theorem for Harmonic Integrals, Proc. London Math. Soc (2), 41 (1936), 483–496.

一般ニ positive-definit ナ計量.

$$dS^2 = \sum g_{jk}\, dx^j dx^k$$

ヲモツ Riemann 空間デハ scalar u ノ grad ハ

$$(1.2) \quad (\operatorname{grad} u)_j = \frac{\partial u}{\partial x_j};$$

vector f ノ div ハ

$$(1.3) \quad \operatorname{div} f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{g}\, f^j;$$

Laplacian Δ ハ

$$(1.4) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{g}\, g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} u$$

デ定義セラレル. 但シコゝデ g ハ $\det(g_{jk})$, g^{jk} ハ g_{jk} ノ逆行列ヲ表ハス。

Green ノ定理. G ヲ区分的ニ滑ラカナル境界 Γ ヲモツ有界ナ領域トスル. f^j ガ $G+\Gamma$ デ連續, G デ連續的可微分デ,

$$\int_G \sqrt{g}\, |\operatorname{div} f|\, dx^1 \cdots\cdots dx^n < +\infty$$

ナラバ

$$(1.5) \quad \int_G \sqrt{g}\, \operatorname{div} f\, dv = \int_\Gamma \sqrt{g}\, f^j\, do_j$$

ガ成立ツ. 但シコゝデ dv ハ volume-element, do_j ハ

$$(1.6) \quad do_j = (-1)^{j-1} dx^1 \cdots\cdots dx^{j-1} dx^{j+1} \cdots\cdots dx^n$$

ヲ現ハス.

コノ定理カラ Green ノ公式ガ導カレル.

$$\begin{cases} (1.7) \quad \int_G \sqrt{g}\, f^i \operatorname{grad}_i u \, dv + \int_G \sqrt{g}\, u \operatorname{div} f \, dv \\ \quad = \int_\Gamma u \sqrt{g}\, f^i \, do_i \ ; \\ (1.8) \quad \int_G \sqrt{g}\, (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u)\, dv \\ \quad = \int_\Gamma \sqrt{g}\, (u \operatorname{grad}^i \varphi - \varphi \operatorname{grad}^i u)\, do_i \end{cases}$$

又 Dirichlet 積分ヲ次ノ如ク定義スル.

$$(1.9) \quad D_G(u, \varphi) = \int_G \sqrt{g} \operatorname{grad}^i u \operatorname{grad}_i \varphi \, dv$$

$$= \int_G \sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \, dv$$

$$(1.10) \quad D_G(u) = D_G(u, u).$$

G ノ境界ガ滑ラカナルトキニハ, Green ノ公式カラ

$$(1.11) \quad D_G(u, \varphi)$$

$$= \int_\Gamma \sqrt{g}\, u \operatorname{grad}^i \varphi \, do_i - \int_G \sqrt{g}\, u \Delta \varphi \, dv$$

ヲ得ル. 従ツテ又

$$(1.12) \quad D_G(\varphi + w) - D_G(\varphi)$$

$$= D_G(w) - 2\int_G \sqrt{g}\, w \Delta \varphi \, dv + 2\int_\Gamma \sqrt{g}\, w \operatorname{grad}^i \varphi \, do_i$$

ガ成立ツ.

吾々ハ Hodge ニ從ッテ

$$\Delta\varphi = 0$$

ヲ滿足スル函數 φ ヲ調和函數ト名付ケル．(1.12) ハ φ ガ $G+\Gamma$ デ連續的可微分，G デ二回連續的可微分，w ガ $G+\Gamma$ デ連續，G デ連續的可微分ナルトキ，スベテノ $\int_G dv$ ガ存在スルトノ假定ノ下デ成立スル，從ッテ φ, ψ ガ共ニ $G+\Gamma$ デ連續，G デ二回連續的可微分ナルトキ，φ ト ψ ガ Γ 上デ一致シ且ツ φ ガ Γ マデ入レテ連續的可微分ナラバ

$$(1.13)\quad D_G(\psi) - D_G(\varphi)$$
$$= D_G(\psi-\varphi) - 2\int_G \sqrt{g}\,(\psi-\varphi)\,\Delta\varphi\, dv$$

デアル，故ニコノトキ φ ガ調和ナラバ

$$D_G(\varphi) \leqq D_G(\psi)$$

スナハチ調和ナ φ ハ D_G ヲ最小ナラシメル．逆ニ與ヘラレタ境界値ヲモツ函數 φ ガ D_G ヲ最小ナラシメルナラバ，ソレハ調和デアル。

何トナレバ，コノトキ w ヲ Γ 上デ 0 トナル如クトレバ (1.12) カラ

$$\lambda^2 D_G(w) - 2\lambda\int_G \sqrt{g}\; w\,\Delta\varphi\; dv \geqq 0$$

ヲ得ルカラデアル．コノ際，G ノ代リニ全ク G 内ニ含マレル部分領域 G' ヲトッテ考ヘレバ明カナル如ク，φ ニツイテ Γ マデ入レテ連續的可微分ナルコトヲ假定スル必要ガナイ。

以上ノ考察ハ変分原理ノ形ニ要約セラレル．$\mathcal{S}$ ヲ G ノ

境界ニ充分近イ点ニ於ケル値ヲ変ヘナイ変分トスレバ，(1.12)カラ

$$(1.14)\quad \delta D_G(\varphi) = -2\int_G \sqrt{g}\,\delta\varphi\,\Delta\varphi\,dv$$

ヲ得ル．$\Delta\varphi = 0$ ナル方程式ハ変分方程式．

$$\delta D_G(\varphi) = 0$$

デ現ハサレル．

§2. 超 Poincaré 空間ニ於ケル Dirichlet 積分．超 Poincaré 空間ハ analytical manifold デアル．Analytical manifold ハ一般ノ Riemann 空間ニナイ不変式ヲモツ．座標ヲ

$$z = (z^1, z^2, \cdots\cdots, z^n), \quad z^j = x^j + iy^j$$

トオク．スルト例ヘバ，u ガ scalar ナルトキ

$$(2.1)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x^j} - i\frac{\partial u}{\partial y^j}\right) dz^j$$

ハ不変式デアル．言ヒ換ヘレバ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x^1} - i\frac{\partial u}{\partial y^1},\ \frac{\partial u}{\partial x^2} - i\frac{\partial u}{\partial y^2},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial u}{\partial x^n} - i\frac{\partial u}{\partial y^n}\right)$$

ハ共変複素 vector デアル．吾々ハコレヲ ∇u デ現ハスコトニスル．スナハチ．

$$(2.2)\quad \nabla_j u = \frac{\partial u}{\partial x^j} - i\frac{\partial u}{\partial y^j}$$

$D_G(\varphi)$ ノ形ヲ定ナルタメニ先ヅ

$$\mathrm{grad}^j\varphi\,\mathrm{grad}_j\varphi$$

ヲ求メヨウ．先ヅ $z=(r,0,\cdots\cdots,0)$ ナル点ニトリ座標ヲ $x^1, y^1, x^2, \cdots\cdots, y^n$ ノ順ニトッテ (1.1) カラ g_{jk} ヲ求メルト

$$\begin{cases} g_{11}=g_{22}=\dfrac{1}{(1-|z|^2)^2}, \quad g_{33}=\cdots\cdots=g_{2n2n}=\dfrac{1}{1-|z|^2} \\ \text{其他ノ } g_{jk}=0 \end{cases}$$

トナル．従ッテ

$$\mathrm{grad}^j\varphi\,\mathrm{grad}_j\varphi=(1-|z|^2)^2\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^1}\right)^2\right\}$$
$$+(1-|z|^2)\left\{\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)^2+\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^j}\right)^2\right\}$$

デアル．コレヲ (2.2) ナル記号ヲ使ッテ書直セバ

$$\mathrm{grad}^j\varphi\,\mathrm{grad}_j\varphi$$
$$=(1-|z|^2)\left\{\sum|\nabla_j\varphi|^2-\sum|\nabla_j\varphi\,z^j|^2\right\};$$

或ハ vector ノ記号ヲ用ヒテ

$$\mathrm{grad}^j\varphi\,\mathrm{grad}_j\varphi \tag{2.3}$$
$$=(1-|z|^2)(|\nabla\varphi|^2-|(\nabla\varphi\,\bar z)|^2)$$

コノ式ハ $z=(r,0,\cdots\cdots,0)$ ナル点デ求メタノデアルガ左辺モ右辺モ unitary 変換デ変ラナイカラ，任意ノ点デ成立ツ．故ニ

$$\sqrt{g}=\frac{1}{(1-|z|^2)^{n+1}}$$

デアルカラ

(2.4) $$D_G(\varphi)=\int_G \frac{|\nabla\varphi|^2-|(\nabla\varphi\,\bar{z})|^2}{(1-|z|^2)^n}\,dv$$

§3. 基本解. ユークリッド空間ノ調和函数論デハ r^{2-n} ($r=\sqrt{\sum(x^j)^2}$) ナル"基本解"ガ中心的役割ヲ演ズル. 吾々ノ場合コレニ相當スルモノハ何デアラウカ? コレヲ求メルタメニ

(3.1) $V(r)$, $r=|z|$

ガ $z=0$ ヲ除イテ至ル所調和デアッタトシテ見ヨウ. 一般ニ φ ガ $r=|z|$ ノミノ函数ナルトキハ, ds^2 ガ球對稱 (unitary 変換デ不変!) デアルカラ, $\Delta\varphi$ モ r ノミノ函数デアル. 從ッテ

$$\delta D_G(\varphi)=-2\int_G \sqrt{g}\,\delta\varphi\,\Delta\varphi\,dv$$

カラ明ラカナル如ク, $\Delta\varphi=0$ ナルタメニハ φ ヲ r ノミノ函数ト考ヘテ作ッタ変分 δD_G ガ 0 トナルコトガ充分條件ヲ與ヘル. (2.4) カラ $D_G(V)$ ヲ求メルト

$$\nabla_j V=\frac{\bar{z}^j}{r}V'(r)$$

デアルカラ

$$D_G(V)=\int_G \frac{(V'(r))^2}{(1-r^2)^{n-1}}\,dv$$

トナル. G ヲ Poincaré 空間全体ニトレバ

$$D(V)=\Omega\int_0^1 \frac{r^{2n-1}(V')^2}{(1-r^2)^{n-1}}dr$$

但シ Ω ハ単位球ノユークリッド表面積ヲ現ハス．コレヨリ $\delta D(V)=0$ ヲ解ケバ

$$V'=\frac{C(1-r^2)^{n-1}}{r^{2n-1}}, \qquad (C\text{ハ積分常数})$$

故ニ

$$(3.2)\qquad V(r)=C\int\frac{(1-r^2)^{n-1}}{r^{2n-1}}dr$$

然ルニ一方ΞカラOニ到ル非ユークリッド距離ハ

$$l=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}=\tanh^{-1}r, \qquad r=|z|$$

ヲ與ヘラレ，又半径 l ノ非ユークリッド球面積ハ

$$\omega(l)=\frac{\Omega r^{2n-1}}{(1-r^2)^n}=\Omega\sinh^{2n-1}l\cosh l$$

デアル．Vヲコレヲ用ヒテ表セバ

$$(3.3)\qquad V(\tanh l)=C\int_\infty^l\frac{dl}{\omega(l)}+\text{const.}$$

コノ結果ハ當然ノコトト考ヘラレル．VガOヲ除イテ $\Delta V=0$ ヲ満足スルトスレバ，Greenノ定理カラ，Oヲ中心トスル半径 l ノ球面 $O(l)$ 上ノ表面積分．

$$\int_{O(l)}\sqrt{g}\,\mathrm{grad}^j V\,do_j$$

ハ一定デナケレバナラヌ．コノ事カラ直チニ

$$\omega(l)\frac{d}{dl}V(\tanh l)=const$$

ガ結論セラレル。

— 吾々ハ標準基本解トシテ

$$(3.4)\qquad V(\tanh l)=-\int_{\infty}^{l}\frac{dl}{\omega(l)}$$

ヲトリ，コレヲ常ニ V デ表ハスコトニスル，r デ書ケバ

$$(3.5)\qquad V(r)=-\int_{1}^{r}\frac{(1-r^2)^{n-1}}{\Omega\, r^{2n-1}}dr$$

$r=0$ ノ近傍デハ

$$(3.6)\qquad V(r)\sim\frac{1}{\Omega}\frac{1}{(2n-1)r^{2n-2}}$$

及ビ

$$(3.7)\qquad \nabla_j V(r)\sim\frac{-\bar{z}^j}{\Omega\, r^{2n}}$$

ガ成立ツ．又 Γ ガ 0 ヲ含ム閉曲面ナルトキハ

$$(3.8)\qquad \int_{\Gamma}\sqrt{g}\ \mathrm{grad}^j V\, d\sigma_j=-1$$

V ニツイテユークリッド空間ノ場合ト全ク同様ニ次ノ事實ガ証明セラレル．G ヲ充分ニ[2)]滑ラカナ境界 Γ ヲ有スル

---

2) 二回連續的可微分トスレバヨイ．(3.6)カラ明ラカナル如ク，$V(r)$ ノ $r=0$ ニ於ケル特異性ハ全クユークリッド空間ノ調和函數ノ夫レト同ジデアル．故ニ $V(r)$ ヲ含ム積分ノ收斂性，連續性等ニツイテハユークリッド空間ノ場合ト全ク同ジ結果ガ成立スル。

有界ナ領域，φ ヲ $G+\Gamma$ デ連續的可微分ナ函數トシ，

$$\nu=\nu(\tanh l),\quad l=l(z,\zeta)$$

トオケバ

$$(3.9)\quad \int_G \sqrt{g}\,\mathrm{grad}^j \nu\,\mathrm{grad}_j \varphi\, dv$$

$$=p\varphi(\zeta)+\int_\Gamma \sqrt{g}\,\varphi\,\mathrm{grad}^j \nu\, do_j,$$

但シ p ハ ζ ガ G 内ニアルトキ $+1$，Γ 上ニアルトキ $+\frac{1}{2}$，$G+\Gamma$ ノ外ニアルトキ 0 ヲ表ハス．更ニ φ ガ $G+\Gamma$ デ二回連續的可微分ナル場合ニハ

$$(3.10)\quad p\varphi(\zeta)=-\int_G \sqrt{g}\,\nu\Delta\varphi\, dv-\int_\Gamma \sqrt{g}\,\varphi\,\mathrm{grad}^j\nu\, do_j$$

$$+\int_\Gamma \sqrt{g}\,\nu\,\mathrm{grad}^j \varphi\, do_j.$$

§4．平均値ノ定理．基本解ヲ用ヒテ平均値ノ定理ガ証明セラレル．$O(\zeta)=O(\zeta,l)$ ヲ ζ ヲ中心トスル非ユークリッド球面，G ヲソノ内部トシ，φ ガ $G+O(\zeta)$ デ調和デアッタトスル．スルト (3.10) カラ

$$\varphi(\zeta)=-\int_{O(\zeta)} \sqrt{g}\,\varphi\,\mathrm{grad}^j \nu\, do_j+\int \sqrt{g}\,\nu\,\mathrm{grad}^j\varphi\, do_j$$

デアルガ，$O(\zeta)$ 上デハ ν ハ一定デアルカラ

$$\int_{O(\zeta)} \sqrt{g}\,\nu\,\mathrm{grad}^j\varphi\, do_j=\nu\int_{O(\zeta)} \sqrt{g}\,\mathrm{grad}^j\varphi\, do_j$$

$$=\nu\int_G \sqrt{g}\,\Delta\varphi\, dv=0$$

又 $\operatorname{grad}^j v\, do_j$ ハ $O(\zeta)$ 上デ一定デ,

$$\int_{O(\zeta)} \sqrt{g}\, \operatorname{grad}^j v\, do_j = -1$$

デアル。

故ニ $\varphi(\zeta)$ ハ $\varphi(z)$ ノ $O(\zeta)$ 上ノ平均値ニ等シイ。

φ ガ $G+O(\zeta)$ デ連續, G デ調和ナル場合ニモ,

$O(\zeta)=O(\zeta, l)$ ノ代リニ $O(\zeta, l-\varepsilon)$ ヲトッテ $\varepsilon \to 0$

トスレバ同ジ結果ガ得ラレル。スナハチ

平均値ノ定理. φ ガ ζ ヲ中心トスル非ユークリッド球面 $O(\zeta)$ ノ内部デ調和デ, $O(\zeta)$ マデ入レテ連續ナラバ φ ノ $O(\zeta)$ 上ノ平均値ハ $\varphi(\zeta)$ ニ等シイ。

逆ニ:

定理: 領域 G 内デ連續ナ函數 $\varphi(z)$ ガ G 内ノ任意ノ球ニツイテ平均値ノ定理ヲ滿足スルナラバ φ ハ調和デアル。[3]

コレヲ證明スルタメニ

Lemma. $\varphi(z)$ ハ任意回數連續的可微分デアル。[3]

證明. $f(l)$ ヲ充分ノ回數連續的可微分デ

$$\begin{cases} f(l) \geqq 0,\ l<\varepsilon \text{ 又ハ } l>2\varepsilon \text{ ノトキハ } f(l)=0, \\ \text{且} \\ \displaystyle\int \sqrt{g}\, f(l)\, dv_z = 1,\ l=l(z,0) \end{cases}$$

ナル函數トスル、然ルトキハ $O(\zeta, 2\varepsilon) \subset G$ ナル ζ ニ對シ

---

3) R. Courant u. D. Hilbert: Meth. d. Math.-Physik. II. Kap. IV, 251—252. 證明モ Courant u. Hilbert ト全ク同ジデアル。

テハ平均値ノ定理カラ

$$\varphi(\zeta)=\int\sqrt{g}\,f(l(\zeta,z))\,\varphi(z)\,dv_z$$

然ルニ $f(l(\zeta,z))$ ハ ζ ニツイテ必要ナ回数ダケ連續的可微分デアル．故ニ $\varphi(\zeta)$ モ同ジ回数連續的可微分デアル．

$\varphi(\zeta)$ ガ任意回数連續的可微分デアルカラ，(3.10) ニヨッテ

$$\varphi(\zeta)=-\int_{K(l)}\sqrt{g}\,\nu\,\Delta\varphi\,dv-\int_{O(\zeta,l)}\sqrt{g}\,\varphi\,\mathrm{grad}^j\nu\,do_j$$
$$+\int_{O(\zeta,l)}\sqrt{g}\,\nu\,\mathrm{grad}^j\varphi\,do_j,$$

但シコヽデ $K(l)$ ハ $O(\zeta,l)$ ノ内部ヲ現ハス．然ルニ假定ニヨッテ

$$\varphi(\zeta)=-\int_{O(\zeta,l)}\sqrt{g}\,\varphi\,\mathrm{grad}^j\nu\,do_j$$

デアリ，又

$$\int_{O(\zeta,l)}\sqrt{g}\,\nu\,\mathrm{grad}^j\varphi\,do_j=\nu(l)\int\sqrt{g}\,\mathrm{grad}^j\varphi\,do_j$$
$$=\nu(l)\int_{K(l)}\sqrt{g}\,\Delta\varphi\,dv$$

デアル．故ニ

$$\int_{K(l)}\sqrt{g}\,(\nu-\nu(l))\,\Delta\varphi\,dv=0$$

然ルニ(3.6)カラ明ラカナル如ク

$$\lim_{l\to 0}\frac{1}{l^2}\int_{K(l)}\sqrt{g}\,(\nu-\nu(l))\,dv=\frac{n-1}{2n(2n-1)}$$

デアル. 故ニ$\Delta\varphi$ハ連續デアルカラ

$$\Delta\varphi=\frac{2n(2n-1)}{n-1}\lim_{l\to 0}\frac{1}{l^2}\int_{K(l)}\sqrt{g}\,(\nu-\nu(l))\,\Delta\varphi\,dv=0$$

コレデ定理ガ証明サレタ。[4)]

上ノ二定理カラ前談話デ定義シタN.E.—調和函數ハ$\Delta\varphi=0$デ定義サレタHodgeノ調和函數ト一致スルコトガ分ル. 從ツテN.E.—調和函數ニツイテノ境界値問題モHodgeノ一般論ニヨツテ解カレ得ルコトニナル。デ吾々ハ境界値問題ニツイテハ深入リシナイコトトシ, 唯基本解νヲ用ヒレバ吾々ノ場合ニハ所謂"積分方程式ノ方法"ニヨツテユークリッド空間ノ場合ト全ク平行ニ論ゼラレルコトヲ注意スルニ止メル。

§5. 實超Poincaré空間ノ調和函數

normガ1ヲ超エナイn次元實ベクトル: $x=(x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n)$全体カラ成ル空間デ

$$(5.1)\quad ds^2=\frac{|dx|^2}{1-|x|^2}+\frac{|(x\,dx)|^2}{(1-|x|^2)^2}$$

デ計量ガ定義サレタ非ユークリッド空間ヲ實超Poincaré

---

4) 勿論$n\neq 1$トスル. $n=1$ノ場合ハ普通ノ函數論ノ場合デ, ソレハ始メカラ除外シタアル.

空間トヨブ。[5] コノ空間ニ於テモ全ク同様ナ議論ヲ行フコトガ出来ル。

先ヅ $grad^i \varphi \, grad_i \varphi$ ヲ求メルト

$$grad^i \varphi \, grad_i \varphi = (1-|x|^2)(|\nabla\varphi|^2 - |(x \, \nabla\varphi)|^2)$$

トナル．從ッテ

$$(5.2) \quad D_G(\varphi) = \int_G \frac{|\nabla\varphi|^2 - |(x\nabla\varphi)|^2}{(1-|x|^2)^{\frac{n-1}{2}}} dv,$$

但シコノデ $\nabla\varphi$ ハ $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \cdots\cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right)$ ヲ現ハス.

基本解ヲ求メレバ

$$(5.3) \quad v(r) = -\int_1^r \frac{(1-r^2)^{\frac{n-3}{2}}}{\Omega r^{n-1}} dr$$

トナルガ，コレモ非ユークリッド球面積

$$\omega(l) = \frac{\Omega r^{n-1}}{(1-r^2)^{\frac{n-1}{2}}}, \quad l = \tanh^{-1} r$$

ヲ用ヒレバ

$$(5.4) \quad v(\tanh l) = -\int_\infty^l \frac{dl}{\omega(l)}$$

ト現ハサレル。

---

5) 筆者ノ一般非ユークリッド空間ニ関スル前試論ノ記号デ言ヘバ

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & -1 \end{array}\right], \quad \Delta = -1$$

ナル實非ユークリッド空間デアル。

コノ基本解ヲ用ヒレバ平均値ノ定理及ビソノ逆定理ガ前ト同様ニ証明セラレル。