1053. 一般ナル係數體ヲ有スル代數函數體及ビ多元環ニ就テ IV

稻葉　榮次

係數體變更ノ理論(主トシテ Resthomomorphism ノ理論)ノ應用トシテ標數0ナル代數的ニ閉ヂタ係數體ヲ有スル代數函數體ノ因子類群ノ構造ヲ本誌第229号ニ於テ述ベタガ,コレハ別ニ新シイ結果デハナク,Schilling ガ既ニ Amer. Journ. of Math. 61 (1939) ニ

於テ抽象アーベル函數ノ理論ノ副産物トシテ出シテキル。

併シSchillingノハclassicナ結果ヤ代數幾何ノ事柄等種々用ヒルノデアルガ，私ノハ單ニclassicナ結果トResthomomorphismノ理論ノミヲ使フ所ガ異ル．何レニシテモ標數任意ナル場合ガ未ダ完全ニ解決サレテオラヌシ，標數0ナル場合デモclassicナ結果(係數体ガ複素數体ノ場合)ニ頼ラネバナラヌノハ飽キ足ラヌト思フ．(係數体一般ノ場合ニ抽象的ニ扱フコトハ示性數1ノトキHasseガ成功シテキルガ，示性數一般ノ場合ハ未ダ成功シテオラヌ様デアルカラ。)トコロデclassicナ結果ハ通常第一種ノアーベル積分ニヨルtreue DarstellungニヨツテI因子類群ノ構造ガ決定サレルノデアル。

ソノ方法ハ解析的デアッタガ，昨年守屋氏ハ北大紀要ニ於テソノ証明ヲ代數的デ且ツ位相的ナ体裁ニ於テ発表セラレタ．トニカク一般ノ場合ノ因子類群ノ構造ノ決定ハ相當困難デ恐ラク代數的ナ方法ノミデハウマク行カヌノカモ知レヌ。亦Hasse等ニ於テハ因子類群ノ構造ハkomplexe Multiplikationノ理論ノ抽象化或ハKongruenzzetafunktionニ関スルRiemannsche Vermutungノ問題ト関聯シテ研究サレテ来タコトモ注意スベキデアル．(後者ニ関シテハWeilノ報告ガアルコトハ良ク知ラレテキル).

Resthomomorphism ノ理論ノモウ一ツノ應用トシテ「ヒルベルト」ノ既約定理ノ証明ヲ本紙第234号デ述ベタガ，コレハ Eichler ノ方法ヲ簡易化シテ改メタニ過ギナイ．ソノ際述ベタ証明ハ係数体ガ代数々体ノ場合ニ就テデアッタガ，實ハ係数ガ一般ニ absolute Dimension 有限ナル場合（Primkörper ニ有限個ノ元ヲ添加シテ出来ル場合　但シ有限体ノ場合ヲ除ク）ニモ適用サレル。シカシ Inseparabilität ヲ考慮スル必要カラ代数々体ノ場合ノ証明ト異ル点ガアル。ソレヲ次ニ述ベヨウト思フ。

コノ一般ナル「ヒルベルト」ノ既約定理ハ次回ニ述ベル豫定デアル Resthomomorphism ノ理論ノ多元環ヘノ應用ニ於テ用ヒラレル筈デアル。

記号ハ第234号ニ於ケルモノヲ踏襲スルコトトシ，係数体 Λ ハ absolute dimension 有限デ有限体デハナイトスル．コノ場合ノ「ヒルベルト」ノ既約定理ノ証明ノ第234号ニ於ケル場合ト異ル点ハ先ヅ第一ニ $m=1,\ \nu>1$ ナル場合ガ $m=1,\ \nu=1$ ナル場合ニ帰着スルコトノ証明ニ於テ次ノ如ク ν ニツイテノ帰納法ニヨル．即チ $\Lambda(z_1, z_2, \ldots\ldots z_{\nu-1})$ ナル体ヲ Λ_1 トスレバ

$$f_i(x, z_1, z_2, \ldots\ldots z_\nu) \equiv f_i^*(x, z_\nu)$$

ハ Λ_1 ニ於ケル既約式トナリ，Λ_1 ハ absolute Dimension 有限デアルカラ，$f_i^*(x, \omega)$ スベテ Λ_1 ニ於テ既約ナル如ク z_ν ニ Λ_1 ニ於ケル値 ω ヲトラセレバヨイ。

第二ニ $m=1$, $\nu=1$ ナル場合ノ既約定理ハ次ノ如ク拡張サレタ形ニ於テ証明シタ方ガヨイ。

［定理22］ Λガ absolute Dimension 有限トシ，有限体デナイトスル. K ガ $\Lambda(Z)$ ノ上ノ代数函数体デ，K ハ常数体Λノ代数的拡大ト unabhängig トスル. $f_i(x)$ $(i=1,2,\ldots\ldots\lambda)$ ガ K ニ於ケル x ノ既約多項式トスルトキ，$\Lambda[Z]$ ニ於ケル一次ノ素 Ideal $(Z-a)$ ヲトリ，（但シ $a \subset \Lambda$），コレノ K ニ於ケル Primteiler $\mathfrak{p}$ ニヨル Restbildung ニヨッテ $f_i(x) \bmod \mathfrak{p}$ ガスベテ $K \bmod \mathfrak{p}$ ニ於テ既約ナル如ク a ヲ無数ニ撰ビ得ル。

（証明） Λノ absolute Dimension 0 デ標数 0 ノ場合即チ代数々体ノ場合.

$f_i(x)=0$ ハ K ノ上ノアル体 Ω_i ヲ生ゼシムル. $\Lambda(Z)$ ノ上デ Ω_i ヲ生ゼシムル方程式ガ $g_i(x, Z)=0$ ナルトキ，$Z=a \subset \Lambda$ トシテ $g_i(x, a)$ スベテΛニ於テ既約ナラシムレバ（第234号参照），$f_i(x) \bmod \mathfrak{p}$ ハ $K \bmod \mathfrak{p}$ ニ於テ既約トナル. 但シ $\mathfrak{p}$ ハ $Z-a$ ノ K ニ於ケル Primteiler デアル。

Λノ absolute Dimension 1 デ標数 $P \neq 0$ ナルトキ即チ有限体 k ヲ常数体トスル $k(t)$ ノ上ノ代数函数体ナル場合.

k ハ vollkommen ダカラ t ヲ適当ニ撰ベバ Λ ハ $k(t)$ ノ上デ separabel トナル. Λハ $k(t)$ ニ u

ヲ添加シテ生ズルトスレバ，$1, u^p, u^{2p}, \cdots\cdots$ ハ $k(t)$ ノ上ノ Λ ノ Körperbasis トナル。今 $f_i(x)$ ノ Inseparabilitatsexponent ヲ p^{e_i} トスルトキ

$$f_i(x) = \psi_i(x)^{p^{e_i}}$$

トオク、コヽニ $\psi_i(x)$ ハ $f_i(x)$ ノ係数ノ p^{e_i} 乗根ヲ K ニ添加シテ生ズル体 K_i' ニ於ケル係数ヲ有スル x ノ多項式デ separable デアル。ソコデ $\psi_i(x)$ ハ galoissch ト假定シテイヽ。（第２３４号ニ於ケルト同じ理由）。K_i' ヲ $\Lambda(Z)$ ノ上ノ体ト考ヘタトキノ Inseparabilitätsgrad ヲ p^{f_i} トシ．f_i ノ最大ヲ f トス．$Z^{p^f} = Z'$ トオケバ，$K_i^0 = K_i' \Lambda'$ ガ $\Lambda'(Z')$ ノ上デ separable ナル如キ Λ ノ rein inseparable ナ拡大 Λ' ガアル．（Λ' ハ $t^{\frac{1}{p^f}}$ ヲ含ムトスル）．更ニ Λ' ヲ代数的閉擴大シタトキノ $\psi_i(x)$ ノ既約因子ヲ $\varphi_i(x)$ トスル．コレノ係数ヲスベテ K_i^0 ニ添加シタ体ガ $K_i^* = K_i' \Lambda_i^*$ トスルトキ，Λ_i^* ハ Λ' ノ separable ナ拡大デアル。スベテノ i ニツイテ Λ_i^* ノ合成体ヲ Λ^{**} トスレバ，コレハ Λ' ノ上デ separable デアル。

サテ第２３４号ニ於ケルト同ジク Λ ニ關スル相對次数 1 ナル Λ^{**} ニ於ケル Primideal $\mathfrak{P}_{T_i}$ ヲ撰ビ $\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x)}$ ハスベテ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ ノ上デ既約ナラシメ得ル．類体論ニヨリ $Z' - \overline{a_i^{(T_i)}}$ ノ Primteiler $\overline{\mathfrak{p}_i^{(T_i)}}$ ヲトルトキ $\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x)} \bmod \overline{\mathfrak{p}_i^{(T_i)}}$ ガ

$\overline{K_i^{(T_i)}}$ mod $\mathfrak{p}_i^{(T_i)}$ ノ上デ既約ナル如ク $a_i^{(T_i)}$ ヲ撰ビ得ル。

$$a' \equiv a_i^{(T_i)} \bmod \mathfrak{F}_{T_i}, \quad a' \subset \Lambda'$$

ナル a' ヲ撰ベバ，$\mathfrak{p}^*$ ヲ $Z'-a'$ ノ K_i^* ニ於ケル Primteiler トスルトキ，$\varphi_i(x) \bmod \mathfrak{p}^*$ ガ $K_i^* \bmod \mathfrak{p}^*$ デ既約トナル。有限個ノ a' ヲ除キ，$\mathfrak{p}'$ ヲ K_i^0 ニ於ケル $Z'-a'$ ノ Primteiler トスレバ，$\psi_i(x) \bmod \mathfrak{p}'$ ハ $K_i^0 \bmod \mathfrak{p}'$ デ既約トナル。

サテ $p^{e_i} > 1$ ナルトキハ $f_i(x)$ ノ係數ノウチデ K ノ元ノ P 冪デナイモノ η_i ガアル。$x^p - \eta_i$ デ割レル $\Lambda(Z)$ ノ上ノ x ノ既約多項式ヲ $g_i(x)$ トスルトキ $g_i(x)$ ノ係數ノウチニ $\Lambda(Z)$ ノ元ノ P 冪デナイモノ $\theta_i(Z) \subset \Lambda(Z)$ ガアル。$\theta_i(Z)=$ ハ cZ^r，$(r, P)=1$，$c \subset \Lambda$ ナル項カ或ハ dZ^{mP}（d ハ Λ ノ元ノ P 冪デナイ）ナル項ガアルカラ

$$b = a' + \left(t^{\frac{s}{p^f}} + 1\right) h(t)$$

$$(s, p) = 1, \quad h(t) \subset \mathfrak{F}_{T_1} \mathfrak{F}_{T_2} \cdots\cdots \mathfrak{F}_{T_\lambda}$$

$$b \subset \Lambda', \quad a = b^{p^f} \subset \Lambda$$

トシテ，t ノ多項式 $h(t)$ ノ次數及ビ S ヲ充分大ニトッテオケバ，$\theta_i(a) \subset \Lambda$ デコレヲ $1, u^p, u^{2p}, \cdots\cdots$ デ表ハシタトキノ $h(t)$ ニ於ケル係數ニハ t^p ノ多項式デナイモノガアルカラ $\theta_i(a)$ ハ Λ ノ元ノ P 冪ニナラヌ。ソコデ $\mathfrak{p}$ ガ $Z-a$ ノ K ニ於ケル Primteiler トスルトキ $x^p - \eta_i \bmod \mathfrak{p}$ ガ $K \bmod \mathfrak{p}$ ニ於テ既

約トナル。

従ツテ $f_i(x) \bmod \mathfrak{p}$ ハ $K \bmod \mathfrak{p}$ ニ於テ p 冪トナラヌ。亦 $b \equiv a' \bmod \mathfrak{z}\tau_i$ ダカラ $\mathfrak{p}''$ ヲ $Z'-b$ ノ K_i^0 ニ於ケル Primteiler トスルトキ $\psi_i(x) \bmod \mathfrak{p}''$ ハ $K^0 \bmod \mathfrak{p}''$ デ既約トナルカラ, $f_i(x) \bmod \mathfrak{p}$ ハ $K \bmod \mathfrak{p}$ デ既約トナル。

Λ 一般ノ場合ハ absolute Dimension ニ関スル帰納法ニヨル, 前ノ場合ト同ジク $f_i(x)$ ガ $\varphi_i(x)$ ナル因子ヲ有スルトキ, $\mathfrak{z}$ ニヨル Restbildung ニヨッテ $\overline{\varphi_i(x)}$ ガ $\overline{K_i^*}$ ニ於テ既約ナル如ク Λ^{**} ニ於ケル素 Ideal $\mathfrak{z}$ ヲ撰ブ。$\overline{\Lambda^{**}}$ ハ Λ ヨリ absolute Dimension 小デアルカラ帰納法ノ仮定ニヨリ $Z'-\overline{a'}$ $(a' \subset \Lambda')$ ノ $\overline{K_i^*}$ ニ於ケル Primteiler $\overline{\mathfrak{p}_i}$ ヲトリ $\overline{\varphi_i(x)} \bmod \overline{\mathfrak{p}_i}$ ガ $\overline{K_i^*} \bmod \overline{\mathfrak{p}_i}$ デ既約ナラシメ得ル。

且ツ $a^0 \subset \Lambda'$, $a^0 \equiv a' \bmod \mathfrak{z}$, $a^{0p^f} = a'' \subset \Lambda$ ナル如ク a'' ヲトレバ, 有限個ノ a^0 ヲ除キ, $Z'-a^0$ ノ Primteiler $\mathfrak{p}^*$ ニツキ $\psi_i(x) \bmod \mathfrak{p}^*$ ガ $K_i^* \bmod \mathfrak{p}^*$ ニ於テ既約ダカラ, $\mathfrak{p}''$ ヲ $Z-a''$ ノ K ニ於ケル Primteiler トスレバ $f_i(x) \bmod \mathfrak{p}''$ ハ $K \bmod \mathfrak{p}''$ ニ於テ高々 P 冪トナルダケデアル。更ニ a'' ヲ適當ニ撰ベバ P 冪ニモナラヌコトヲ云ハウ。

$f_i(x)$ ノ係数ノウチデ P 冪デナイモノヲ η_i トシ, $x^p-\eta_i$

デ割レル $\Lambda(Z)$ ニ於ケル x ノ既約多項式 $g_i(x)$ ノ係数ノウチ $\Lambda(Z)$ ノ元ノ p 冪デナイモノガアル。ソレヲ $\theta_i(Z)$ トスル。

$\theta_i(Z)$ ガ Z^p ノ多項式デナイトキハ, $\mathfrak{p}'$ ニヨル Restbildung ヲ行ッテ $x^p - \overline{\theta_i(Z)}$ ガ $\bar{\Lambda}(Z)$ デ既約ナル如ク Λ ニ於ケル $\mathfrak{p}$ ニ素ナ Primideal $\mathfrak{p}'$ ヲトリウル。

亦 $\theta(Z)$ ガ Z^p ノ多項式ナルトキハ, ソノ Λ ニ属スル係数ニ Λ ノ元ノ p 冪デナイモノ ξ ガアル。$x^p - \bar{\xi}$ 既約ナル如ク $\mathfrak{p}$ ニ素ナ $\mathfrak{p}'$ ヲ撰ンデ Restbildung ヲ行フ。(コレハ帰納法ノ假定ニヨリ可能), シカラバ $x^p - \overline{\theta(Z)}$ ガ $\bar{\Lambda}(Z)$ デ既約トナル。故ニ $Z = \bar{a}_0$ トシテ $x^p - \overline{\theta(\bar{a}_0)}$ ガ $\bar{\Lambda}$ デ既約トナル如ク $\bar{a}_0 \subset \bar{\Lambda}$, $a_0 \subset \Lambda$ ヲトリウル。

サテ $a \equiv a_0 \bmod \mathfrak{p}'$, $a \equiv a'' \bmod \mathfrak{p}$ ノ $a \subset \Lambda$ ナル如ク a ヲ撰ベバ, $\theta(a)$ ハ Λ ノ元ノ p 冪トナラズ, 従ッテ $f_i(x) \bmod \mathfrak{P}$ ハ $K \bmod \mathfrak{P}$ デ既約トナル。シカモスベテノ $f_i(x)$ ニツイテ同時ニカヽルコトヲ行ヒ得ルコトモ容易ニ分ル。(証終)

—(未完)—