1051. 普通ノ Green 函數ガ存在シナイトキノ境界値問題（1027ノ續キ）

（豊田理化學研究所佐々木研究室）

佐藤　常三

§4. 前發表ノ末尾ニ於ケル論法ハ頗ル怪シイ．訂正ヲ致シマス．マヅ $G(x,\xi)$ ガ對稱ナルタメノ必要十分條件ハ

$$(12)\quad \rho(\xi)=\nu\int G(x,\xi)\,\rho(x)\,dx$$

デアリ，コノトキ

$$(13)\quad G^{*}(x,\xi)\equiv G(x,\xi)-\nu^{-1}\rho(x)\,\rho(\xi)$$

トオケバ任意 ξ ニ對シテ

$$(f)\quad \int G^{*}(\xi,x)\,\rho(x)\,dx=0$$

ガ成立シ，ヨッテ G^{*} ト $-\Gamma$ トノ間ニハ Reciprocity ガ成立スル．

$$(14)\quad -\lambda\int G^{*}(\eta,x)\,\Gamma(x,\zeta)\,dx=-\Gamma(\eta,\zeta)+G^{*}(\zeta,\eta)$$

但シ　$\Phi(y)\equiv(Py')'+Qy,\quad \Phi(\rho)=0$

$G(x,\xi)$ ハ $\Phi(y)=\rho(x)\,\rho(\xi)$ ニ對シテ Green 函數定義ニ從テ作ル Green 函數；$\Gamma(x,\xi)$ ハ $\Psi(y)\equiv\Phi(y)+\lambda y=\rho(x)\,\rho(\xi)$ ニ屬スル Green 函數デアル。

扨テ次ニ微分方程式：$\Phi(y)+\lambda y=0$ ニゾクスル

Green 函数ヲ $\Gamma^*(x,\xi)$ ト記シ

$$\overline{\Gamma}^*(x,\xi)=\Gamma^*(x,\xi)-\mu^{-1}\rho(x)\rho(\xi)$$

但シ

$$\rho(\xi)=\mu\int\Gamma^*(x,\xi)\rho(x)\,dx$$

トオケバ

$$-\lambda\int G^*(\eta,x)\overline{\Gamma}^*(x\ \zeta)\,dx=-\overline{\Gamma}^*(\eta,\zeta)+G^*(\zeta,\eta)$$

ガ成立シ

$$\text{(ロ)}\quad \Gamma(\eta,\zeta)=\Gamma^*(\eta,\zeta)-\mu^{-1}\rho(\eta)\rho(\zeta)$$

及ビ

$$\mu=-\lambda$$

(イ)ニヨレバ定理1ニ對應シテ

$\boxed{\text{定理3}}$ 境界値問題：

$$\Xi(y)+\lambda y=0,\quad R[y;a,b]=0$$

ト積分方程式：

$$\varphi(x)=\lambda\int G^*(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

トハ $\lambda=0$ ヲ除イテ互ニ等値的デアル。

次ニ $G(x,\xi)$, $G^*(x,\xi)$ デ作ル Fredholm 行列ヲ $D(\lambda)$, $D^*(\lambda)$ トカラベ (ロ) ヨリ

$$\frac{\frac{d}{d\lambda}D^*(\lambda)}{D^*(\lambda)}=-\int\Gamma(x,x)\,dx=-\int\Gamma^*(x,x)\,dx+\mu^{-1}$$

今，便宜上

$$g'(\lambda)/g(\lambda) = -\int \Gamma^*(x,x)\,dx$$

トオケバ，定理２ニ對應シテ

$\boxed{\text{定理 4}}$

$$D^*(\lambda) = C_0\lambda^{-1}g(\lambda), \quad C_0 = \lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}g(\lambda)$$

(15) ヲミレバ $G^*(x,\xi)$ ト $\nu^{-1}\rho(x)\rho(\xi)$ トハ互ヒニ orthogonal デアルカラ

$$(15) \quad D(\lambda) = D^*(\lambda)\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)$$

從ッテ

$$(16) \quad D^*(\lambda) = \frac{\nu}{\nu-\lambda}D(\lambda) = C_0\lambda^{-1}g(\lambda)$$

(15) カラ想像サレルコトハ

$$(17) \quad \Gamma_0(x,\xi) \equiv \Gamma(x,\xi) - \frac{1}{\lambda-\nu}\rho(x)\rho(\xi)$$

ガ $G(x,\xi)$ ノ reciprocal 核トナルコトデアル．即チ

$$(18) \quad -\lambda\int \Gamma_0(x,\xi)G(\xi,y)\,d\xi = G(x,y) - \Gamma_0(x,y)$$

ガ成立スルデアラウ。

コレハタシカニ成立スル．ソノ證明ハ次ノ如クデアル。

$$\Gamma_0(x,\xi) = \Gamma(x,\xi) + C\rho(x)\rho(\xi)$$

トスレバ

$$-\lambda\int \Gamma_0(x,\xi)\,G(\xi,y)\,d\xi$$

$$= -\lambda\int \Gamma(x,\xi)G(\xi,y)\,d\xi - \lambda C\rho(x)\int\rho(\xi)G(\xi,y)\,d\xi$$

$$= -\nu^{-1}\rho(x)\rho(y) - \Gamma(x,y) + G(x,y) - \lambda C\nu^{-1}\rho(x)\rho(y)$$

故ニCヲシテ $\nu^{-1}+\lambda C\nu^{-1} = C$ 即チ $C = -\dfrac{1}{\lambda-\nu}$

ナル如クトレバヨイ。

コレヨリ(15)ガタシカニ誘導サレル.

(17)ニヨレバ

$$D(\lambda)=D^{*}(\lambda)(\lambda-\nu)\times const.$$

シカルニ $D(0)=D^{*}(0)=1$ デアルカラ

$$D(\lambda)=D^{*}(\lambda)\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)$$

(17)ハ又(ロ)ヲ用ヒテ次ノ如クニカケル.

$$(17')\qquad \Gamma_0(x,\xi)=\Gamma^{*}(x,\xi)+\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda-\nu}\right)\rho(x)\rho(\xi)$$

以上ノ結果ヨリ(2)ナル條件即チ

$$\int G(x,\xi)\rho(x)\,dx=0$$

ハ Green 函數 $G(x,\xi)$ ノ建設ニ對シテ何等 essential ノモノデナイコトガ分ル. 蓋シ $\Phi(y)+\lambda y=0$ ニゾクスル。

Green 函數 $\Gamma^{*}(x,\xi)$ ガ見出サレルナラバ $\Gamma(x,\xi)$ ガ

$$\Gamma(x,\xi)=\Gamma^{*}(x,\xi)+\lambda^{-1}\rho(x)\rho(\xi)$$

デ得ラレ, 従ッテ $G^{*}(x,\xi)$ ガ決定サレ, 問題ノ $G(x,\xi)$

ハ単ニ $\nu^{-1}\rho(x)\rho(\xi)$ ナル不定項ヲ形式的ニ附加シテキルニスギナイ。

§5. Example.

$$\begin{cases} \Phi(y)=y'', \quad y(-1)=y(1), \quad y'(-1)=y'(1) \\ \rho=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

マヅ $\Phi(y)=\frac{1}{2}$ ニゾクスル Green 函数ハ構成定義ヨリ

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \alpha_1+\frac{1}{2}(1-\xi)x+\dfrac{x^2}{4}, & x\leqq\xi, \\ \alpha_1+\xi-\frac{1}{2}(1+\xi)x+\dfrac{x^2}{4}, & x\geqq\xi. \end{cases}$$

(12)ニヨレバ

$$\nu^{-1}=\left[\int_{-1}^{\xi}+\int_{\xi}^{1}\right]G(x,\xi)\,dx$$

$$=2\alpha_1-\frac{\xi^2}{2}+\xi-\frac{1}{3}$$

(13)ニヨレバ

$$G^*(x,\xi)=G(x,\xi)-\frac{1}{2\nu}$$

$$=\frac{1}{4}(x-\xi)^2\pm\frac{1}{2}(x-\xi)+\frac{1}{6}, \quad x\lesseqgtr\xi$$

§6. (14)ニヨレバ $-\Gamma(x,\xi)$ ガ $G^*(x,\xi)$ ノ reciprocal 核デアルコトカラ

$$G^*(x,\xi)=\lim_{\lambda\to 0}\Gamma(x,\xi)$$

(ロ) ニヨレバ

$$(18)\quad G^*(x,\xi)=\lim_{\lambda\to 0}\left\{\Gamma^*(x,\xi)+\lambda^{-1}\rho(x)\rho(\xi)\right\}$$

コレハ興味アル結果デアルト思フ。

Example.

$$y''+\lambda y=0,\quad y(-1)=y(1),\quad y'(-1)=y'(1)$$

ニ属スル Green 函数ハ $\Gamma^*(x\ \xi)$ デアルカラ, コレデ求メルト

$$\Gamma^*(x,\xi)=-\frac{1}{2k\sin k}\cos k(x-\xi\pm 1),\quad x\gtrless\xi$$

(ロ) ニヨレバ

$$\Gamma(x,\xi)=-\frac{1}{2k\sin k}\cos k(x-\xi\pm 1)+\frac{1}{2k^2},$$

$$x\gtrless\xi$$

但シ $\lambda=k^2$

然ルニ $$-\frac{1}{2k\sin k}\cos k(x-\xi\pm 1)$$

$$=-\frac{1}{2k\sin k}\left\{1-\frac{(x-\xi\pm 1)^2}{2}k^2+\frac{(x-\xi\pm 1)^4}{12}k^4-\cdots\cdots\right\}$$

$$\lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{2k\sin k}-\frac{1}{2k^2}\right)=\lim_{k\to 0}\frac{k-\sin k}{2k^2\sin k}=\frac{1}{12}$$

故ニ

$$\lim_{k\to 0}\Gamma(x,\xi)=-\frac{1}{12}+\frac{(x-\xi\pm 1)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(x-\xi)^2 \pm \frac{x-\xi}{2} + \frac{1}{6}, \qquad x \gtreqless \xi$$

$$= G^*(x, \xi)$$

本例ヲ以テ分ルヤウニ今マデノ廣義ノ Green 函數ヲ求ムルニハ，マヅ(2)ヲ滿足スルヤウニ $G(x, \xi)$ ヲ決定シ，再ビ $\Gamma^*(x, \xi)$ 又ハ $\Gamma(x, \xi)$ ヲ計算シテヰルガ，Γ^* 又ハ Γ ノ何レカ一ツダケヲ計算スレバ $G(x, \xi)$ ヲ計算スル必要ハナイ。

コノ考ヘハ亦普通ノ Green 函數ノ場合ニモ適用サレル。