1049. 非ユークリッド空間ノ一般化ニ就イテ

小平　邦彦(東大)

菅原先生ノ一般 Poincaré 空間ハ、超射影空間ノ一部分空間ト考ヘルト統一的ニ理解セラレル. コノ立場カラ一般 Poincaré 空間ノ他ニ, 種々ノ非ユークリッド空間ガ得ラレル.[1] 以下コレヲ述ベル。

§1. 超射影空間. $(n+m, m)$ 型ノ real 又ハ complex ノ matrix X, Y, etc. デ rank ガ m ナルモノヲ考ヘ,

$$(1.1) \qquad Y = XQ, \quad |Q| \neq 0$$

ナルトキ X ト Y ハ同値デアルトイフコトニスル. 同値ナルモノノ class ヲ

$$(1.2) \qquad Z = [X]$$

デ現ハス。

定義1.1. $Z=[X]$ ノ全体ヲ n-m-次元超射影空間ト名付ケ $\mathfrak{P}(n,m)$ デ現ハス. X ガ實ナルトキハ實超射影空間, complex ノトキハ複素超射影空間トヨブ. $\mathfrak{P}(n,m)$ ヲ又 $\mathfrak{P}$ ト略記スル。

然ルトキハ, X ノ全体ヲユークリッド的 topology ヲモツ位相空間ト考ヘレバ,

$$(1.3) \qquad X \to Z = [X]$$

ナル寫像ニヨッテ $\mathfrak{P}(n,m)$ ニ topology ガ導入セラレル.

1) F. Klein ノ考ヘノ一般化デアル.

定義1.2. (1.3)ニヨッテ定義セラレル topology ヲ $\mathfrak{P}$ ノ topology トヨブ。

$\mathfrak{X}$ ヲ $\mathfrak{X}=\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$ ト現ハシタトキ $|Q|\neq 0$ ナラバ $Z=[\mathfrak{X}]$ ハ PQ^{-1} デ定マル. コノ意味デ Z ハ PQ^{-1} ナル matrix ヲ現ハスト考ヘル. スナハチ

$$(1.4)\qquad Z=\begin{bmatrix} Z\\ 1\end{bmatrix}^{2)}$$

デアル. コノトキ $\mathfrak{P}$ ノ topology ハ Z—空間ノユークリッド的 topology ト一致スル. $\mathfrak{P}(n,m)$ ハ局所的ニハ nm 或ハ $2nm$ 次元ノユークリッド空間ト同位相デアル. ソレハ $Z=(z_{jk})$ トスレバ nm 個ノ parameter z_{jk} デ現ハサレル.

定理1.1. $\mathfrak{P}(n,m)$ ハ compact ナ analytic manifold デアル.

証明 analytic manifold ナルコトハ明ラカデアル. compact ナルコトハ次ノ如クシテ分ル. $\mathfrak{X}$ ガ與ヘラレタトキ $\mathfrak{X}^*\mathfrak{X}$ ハ positive definit デアルカラ

$$Q^*\mathfrak{X}^*\mathfrak{X}Q=1,\qquad |Q|\neq 0$$

ナル Q ガ存在スル. $\mathfrak{X}$ ノ代リニ $\mathfrak{X}Q$ ヲトッテ見レバ, 任意ノ Z ハ

$$Z=[\mathfrak{X}],\quad \mathfrak{X}^*\mathfrak{X}=1$$

ト現ハサレルコトガ分ル. $\mathfrak{X}^*\mathfrak{X}=1$ ナル $\mathfrak{X}$ ノ全体ハ明ラカ

---

2) $\left[\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}\right]$ ヲ $\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix}$ ト略記スル.

ニ compact ナ空間ヲ成ス. 故ニソノ連續ナル $\mathfrak{P}$ モ compact デナケレバナラヌ。

吾々ハ簡單ノタメ

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

トオク。

次ニ射影變換[3]ナルモノヲ定義スル. T ヲ $n+m$ 階ノ正方行列トシ, $|T| \neq 0$ トスルト, X ト Y ガ (1.1) ノ意味デ同値ナラバ TX ト TY モ同値デアル. ソコデ

定義 1.2　$|T| \neq 0$ ノトキ

$$[X] \to [TX] \tag{1.6}$$

ヲ射影變換ト名付ケ

$$[TX] = T[X] \tag{1.7}$$

ト書ク. T ヲ變換ノ行列ト呼ビ, T ヲ行列トスル射影變換ヲ又 $[T]$ デ表ハス。

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} A \text{ハ} (n,n) \text{型}, \ B \text{ハ} (n,m) \text{型} \\ C \text{ハ} (m,n) \text{型}, \ D \text{ハ} (m,m) \text{型} \end{array} \tag{1.8}$$

トオケバ

$$Z = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \to TZ = \begin{bmatrix} AP+BQ \\ CP+DQ \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

デ與ヘラレル. 特ニ X ノ行ヲ入レ換ヘル變換ハ射影變換デアル.

射影變換ノ全体ハ明ラカニ群ヲ作ル. コレヲ射影變換群

---

3) 或ハ超射影變換

ト名付ケ$\mathfrak{P}\mathfrak{Y}(n,m)$デ表ハス.

定理1.2 $\mathfrak{P}$ハ射影変換群ニ関シテ *transitive* デアル.

証明ハ

$$(1.10)\quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \theta = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$$

カラ明ラカデアル。

§2. 基本行列. $n+m$階ノ *Hermite* 正方行列$\mathfrak{S}$ヲ一ツ定メテ基本行列ト呼ブ[4]. $Z=[X]$ガ与ヘラレタトキ$X^{*}\mathfrak{S}X$ハ *Hermite* 行列デアルカラ, Qヲ適当ニトッテ

$$Q^{*}X^{*}\mathfrak{S}XQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_m \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \pm 1 \text{ 又ハ } 0$$

ナラシメルコトガ出来ル. スナハチ$Z=[X]$ナルXノ内ニ

$$(2.1)\quad X^{*}\mathfrak{S}X = \Delta, \qquad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

ナルモノガ存在スル. コノトキΔニ現ハレル$+1, -1,$ 及ビ0ノ個数ハZデ定マリ代表Xニ関係シナイ。

定義2.1. $X^{*}\mathfrak{S}X=\Delta$ナル代表$X$ヲ正規代表ト名付ケ, ΔヲZノ符号行列, 或ハ単ニZノ符号ト呼ブ。

---

4) 菅原先生ノ *matrix* $\mathfrak{S}$ニ相当スル

Zニ射影変換 $Z \to T^{-1}Z$ ヲ行ヘバ

$$X^*SX \to X^*T^*STX \tag{2.2}$$

トナル. Tヲ適當ニトレバ T^*ST ヲ Δト同ジ形ニ直ス事ガ出来ル. 故ニ始メカラ

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_{n+m} \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_j = \pm 1, \text{ 又ハ } 0 \tag{2.3}$$

ト假定シテ一般性ヲ失ハナイ.

一般ニ Hermite 行列Hガ與ヘラレタトキ, ソノ固有値ノ正ノモノノ個數ヲ n_H^+, 負ノモノノ個數ヲ n_H^- デ現ハス事ニスル. 然ルトキハ

定理2.1. ΔトSノ間ニハ

$$\begin{cases} n_\Delta^+ \leqq n_S^+ \\ n_\Delta^- \leqq n_S^- \end{cases} \tag{2.4}$$

ナル関係ガアル. 從ッテ rank Δ ハ rank S ヲ越エナイ.

證明. $X^*SX = \Delta$ トシ, Xノ各列ヲ $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots\cdots,$ $\mathfrak{x}_m$ トスル. スナハチ $X = (\mathfrak{x}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{x}_m)$ トスルト

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \delta_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}, \qquad \delta_j = \pm 1$$

トオケバ, $X^*SX = \Delta$ナル関係ハ

$$\begin{cases} \mathfrak{y}_j^* S \mathfrak{y}_k = 0 & (j \neq k) \\ \mathfrak{y}_j^* S \mathfrak{y}_j = \begin{cases} \delta_j & (1 \leqq j \leqq r) \\ 0 & (j > r) \end{cases} \end{cases}$$

ト書カレル．從ッテ $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{y}_r = \mathfrak{x}_r$ ナル $n+m$ 個ノ独立ナ vector $\mathfrak{y}_1 \cdots\cdots \mathfrak{y}_r\, \mathfrak{y}_{r+1} \cdots\cdots \mathfrak{y}_{n+m}$ ヲ適當ニ選ンデ

$$\mathfrak{y}_i^* S \mathfrak{y}_k = \varepsilon_j \delta_{jk}$$

ナラシメルコトガ出来ル．[5] コヽデ $\varepsilon_1 = \delta_1, \cdots\cdots, \varepsilon_r = \delta_r$ デアルカラ，コノ事ハ $T = (\mathfrak{y}_1 \cdots\cdots \mathfrak{y}_{n+m})$ トオケバ

$$T^* S T = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \delta_r & & \\ & & & \varepsilon_{r+1} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \varepsilon_{n+m} \end{pmatrix}, \quad |T| \neq 0$$

ニ他ナラナイ．スナハチ $\delta_1 \cdots\cdots \delta_r$ ハ (2,3) ノ $\varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_{n+m}$ ノ一部デアル．

定理2.2．Δ ガ前定理ノ條件 (2.4) ノ他ニ更ニ

(2.5) $\quad m - n_\Delta^+ - n_\Delta^- \leqq n + m - n_S^+ - n_S^-$

ヲ滿足スルナラバ，$X^* S X = \Delta$ ナル X ガ存在スル．而モ S ヲ (2.3) ノ形ニトルナラバ適當ニ行列ヲ入レ換ヘルコトニヨッテ

(2.6) $\quad \Theta^* S \Theta = \Delta$

---

5) 一般ニ H ガ n 階ノ Hermite 行列ナルトキ，m 個ノ vector $\mathfrak{x}_1 \cdots\cdots \mathfrak{x}_m$ ニツイテ

$$\mathfrak{x}_j^* H \mathfrak{x}_k = h_j \delta_{jk}, \quad h_j \neq 0$$

(次頁ヘツヾク)

ナラシメ得ル。

Zガ $\mathfrak{p}$ ヲ動クトキ，ソノ符号Δノ rank ノ最大値ハ，上ノ二定理カラ明ラカナル如ク

$$\mu = \min\{\mathrm{rank}\, S,\ m\} \tag{2.7}$$

ニ等シイ．吾々ハZヲ符号Δニヨッテ分類シテ：

定義 2.2. $\mathrm{rank}\,\Delta = \mu$ ナルZヲ regular element トヨブ．コレニ対シテ $\mathrm{rank}\,\Delta < \mu$ ナルZヲ singular element ト名付ケル．又Δヲ符号トスルZノ作ル $\mathfrak{p}$ ノ部分

（前頁脚註ノツヾキ）

ガ成立シテ居ルナラバ，$\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_m$ ハ一次独立デアッテ，更ニ独立ナ $n-m$ 個ノ vector $\mathfrak{z}_{m+1} \cdots\cdots \mathfrak{z}_n$ ヲ補ッテ，$1 \leqq j, k \leqq n$ ニツイテ

$$\mathfrak{z}_j^* H \mathfrak{z}_k = k_j \delta_{jk}, \qquad (k_j \gtreqless 0)$$

ナラシメルコトガ出来ル．　証明．$\mathfrak{z}$ ニ関スル m 個ノ一次方程式

$$\mathfrak{z}_j^* H \mathfrak{z} = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots\cdots, m$$

ハ独立デアル．何トナレバ $\sum \lambda_j \mathfrak{z}_j^* H = 0$ トスレバ右カラ $\mathfrak{z}_k$ ヲ掛ケルコトニヨッテ $\lambda_k k_k = 0$ ヲ得ルカラ．故ニコノ方程式ハ $n-m$ 個ノ独立解ヲモツ．コノ解ハ又 $\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_m$ トモ独立デアル．何トナレバ $\lambda_1 \mathfrak{z}_1 + \cdots\cdots + \lambda_m \mathfrak{z}_m$ ガ解デアッタトスレバ，之ニ $\mathfrak{z}_j^* H$ ヲ掛ケテ $k_j \lambda_j = 0$ ヲ得ルカラ．コノ事カラ又 $\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_m$ ノ独立ナルコトガ分ル．コノ解 $\mathfrak{z}$ ニツイテ常ニ $\mathfrak{z}^* H \mathfrak{z} = 0$ ナラバ，$n-m$ 個ノ独立解ヲ $\mathfrak{z}_{m+1} \cdots\cdots \mathfrak{z}_n$ トスルコトニヨッテ目的ハ達セラレル．然ラザル場合ニハ $\mathfrak{z}^* H \mathfrak{z} \neq 0$ ヲ満足スル $\mathfrak{z}$ ヲ一ツトッテコレヲ $\mathfrak{z}_{m+1}$ トスレバ，m ガ一ツ増シテ $m+1$ トナル。

空間ヲ $\mathfrak{P}_\Delta$ デ表ハス。

スルト上ノ定理カラ regular part $\mathfrak{P}_\Delta$ ハ θ ヲ含ムト考ヘテヨイ事ガ分ル。

§3. 一般非ユークリッド空間．定義3.1, regular ナ element カラ成ル $\mathfrak{P}_\Delta$ ヲ一般ユークリッド空間ト名付ケル。

コノ定義ガ不當デナイコトハ次第ニ分ル。先ヅ

定理3.1. regular part $\mathfrak{P}_\Delta$ ハ $\mathfrak{P}$ ノ開部分集合デアル。ソノ境界ハスベテ regular element カラ成ル。

証明. $X_0^* S X_0 = \Delta$, rank $\Delta = \mu$ トシ X ヲ X_0 ニ充分近イ行列トスル。スルト X^*SX ハ $X_0^*SX_0$ ニ近イカラ、ソノ固有値モ $X_0^*SX_0$ ノ固有値ニ近イ。スナハチソノ中ノ n_Δ^+ 個ハ殆ンド $+1$, n_Δ^- 個ハ殆ンド -1, 残リハ殆ンド 0 デアル。然ルニ假定ニヨッテ rank $X^*SX \leqq \mu = n_\Delta^+ + n_\Delta^-$ デアル。故ニ殆ンド 0 ナル固有値ハ正シク 0 デナケレバナラヌ。スナハチ X^*SX ハ丁度 n_Δ^+ 個ノ正ノ固有値ト n_Δ^- 個ノ負ノ固有値ヲモツ。故ニ $Z=[X]$ ノ符号ハ $Z_0=[X_0]$ ノ符号ト一致スル。コレデ regular part ハ開イテヰル事ガ分ッタ。境界ガ regular part カラ成ルコトハコノ結果カラ直チニ従フ。

定義3.2

$$(3.1) \quad T^*ST=S$$

ナル射影変換 $[T]$ ヲ運動ト名付ケ、コノ全体ノ作ル群ヲ運動群トヨブ。$\mathfrak{G}_S$ デ現ハス。

各Φ_Δハ明ラカニ運動デ不変デアルガ regular ナΦ_Δニツイテハ次ノ重要ナ定理ガ成立ツ。

定理3.2. *Regular part* Φ_Δハ運動群$\mathfrak{G}_S$ニ関シテ *transitive* デアル.

証明. 定理2.2ニヨッテ

$$(a) \qquad \theta^* S \theta = \Delta$$

スナハチ、$\theta \in \Phi_\Delta$ト考ヘテヨイ。従ッテコノ仮定ノ下ニ

$$(b) \qquad X^* S X = \Delta$$

ナラバ

$$(c) \qquad T\theta = X$$

$$(d) \qquad T^* S T = S$$

ナルTガ存在スルコトヲ示セバ充分デアル。サテ(a)ハ

$$(a)_1 \qquad S = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

ナルコトヲ示シテヰル。(c)ハ

$$(c)_1 \qquad T = (Y \mid X)$$

ト書カレルコトヲ要求スル。コノTヲ(d)ニ入レルト、(d)ハ結局

$$(d)_1 \qquad \begin{cases} Y^* S Y = \Gamma \\ X^* S Y = 0 \\ X^* S X = \Delta \end{cases}$$

トナルガ、コノ最後ノ式ハ(b)ニヨッテ既ニ満タサレテヰル。

故ニ吾々ノ問題ハ

$$(e)\quad \begin{cases} Y^*SY = \Gamma \\ X^*SY = 0 \end{cases}$$

ナルYヲ求メルコトニ帰着スル。但シコノ際 $\det(Y|X) \neq 0$ デナケレバナラヌ点ニ注意ヲ要スル。コレヲ解クタメニYノ各列ヲ $y_1, \cdots\cdots y_n$ トシ、コレニ相当シテ $X = (y_1, \cdots\cdots y_m)$ トショウ。スルト $X^*SY = 0$ ハ

$$(f)\quad X^*S\,y_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots n)$$

ナル一次方程式トナル。

一般ニ $\mathrm{rank}\,A\cdot B \leqq \mathrm{rank}\,A$, $\mathrm{rank}\,B$ デアルカラ $\mathrm{rank}\,X^*S \leqq \mu$ デナケレバナラヌが、假定ニヨッテ $\mathrm{rank}\,X^*SX = \mathrm{rank}\,\Delta = \mu$ デアルカラ

$$\mathrm{rank}\,X^*S = \mu.$$

従ッテ方程式 $X^*Sy = 0$ ハ $n+m-\mu$ 個ノ独立解ヲモツ。

然ルニ

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \delta_\mu & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = (\Delta_1\, \Delta_2 \cdots\cdots \Delta_\mu\, 0 \cdots\cdots 0)$$ トオケ

バ、$X^*SX = \Delta$ ナル式ハ

$$\begin{cases} X^*S\,y_j = \Delta_j & (j = 1, 2, \cdots\cdots \mu) \\ X^*S\,y_j = 0 & (j > \mu) \end{cases}$$

ナルコトヲ示シテヰル。スナハチ $y_{\mu+1} \cdots\cdots y_m$ ハ $m-\mu$ 個ノ独立解デアル。

故ニコノ他ニ独立ナ n 個ノ解ガアル。コレヲ $y_1, \cdots\cdots y_n$ トスル。コノトキ

$$\mathfrak{z}_1 \cdots\cdots \mathfrak{z}_m\ \mathfrak{y}_1 \cdots\cdots \mathfrak{y}_n$$

ハ独立デアル。何トナレバ

$$0=\lambda_1\mathfrak{z}_1+\cdots\cdots+\lambda_m\mathfrak{z}_m+\lambda_{m+1}\mathfrak{y}_1+\cdots\cdots+\lambda_{m+n}\mathfrak{y}_n$$

デアッタトスレバ

$$\lambda_1\Delta_1+\cdots\cdots+\lambda_\mu\Delta_\mu=X^*S(\lambda_1\mathfrak{z}_1+\cdots+\lambda_{m+n}\mathfrak{y}_n)=0$$

従ッテ $\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots=\lambda_\mu=0$ デナケレバナラヌ。更ニ $\mathfrak{z}_{\mu+1}\cdots\cdots\mathfrak{y}_n$ ガ独立デアッタカラ，$\lambda_{\mu+1}=\cdots\cdots=\lambda_{m+n}=0$ トナルカラ。コレデ

$$Y=(\mathfrak{y}_1\cdots\cdots\mathfrak{y}_n)$$

トオケバ

$$X^*SY=0,\quad \det(Y|X)\neq 0$$

ナルコトガ分ッタ。

コノYハ未ダ$Y^*SY=\Gamma$ヲ満足シナイカラ，コレヲY_1ト書クコトニショウ。$T_1=(Y_1|X)$トオケバ，上ノ結果カラ

$$T_1^*ST_1=\begin{pmatrix} Y_1^*SY_1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

ナルコトガ分ル。一方Sハ$(a)_1$ナル形ヲモツノデアルカラ

$$A_1^*Y_1^*SY_1A_1=\Gamma,\quad |A_1|\neq 0$$

ナルA_1ガ存在スル。コレヲ用ヒテ

$$Y=Y_1A_1$$

トオケバ，Yハ明ラカニ求ムルモノデアル。

Singular part ニツイテハ次ノ定理ガ成立ツ：

定理3.3. *Singular part* $\mathfrak{p}_0$ハ$\mathfrak{p}$ニ於テ

至ル所密デナイ。

証明. 一般ニ A, B, C ガ同ジ型ノ正方行列デ, $|A| \neq 0$ ナルトキハ

$$|\lambda^2 A + \lambda B + C| = \lambda^{2n}|A| + \lambda^{2n-1} a_1 + \cdots\cdots$$

デアルカラ, 高々 $2n$ 個ノ λ ヲ除ケバ $|\lambda^2 A + \lambda B + C| \neq 0$ デアル。従ッテ一般ニ高々有限個ノ λ ヲ除ケバ

$$\operatorname{rank}(\lambda^2 A + \lambda B + C) \geqq \operatorname{rank} A$$

ガ成立ツ. コノ事ヲ用ヒルト, λ ガ real ナルトキ

$$(\lambda X_0 + X)^* S (\lambda X_0 + X)$$
$$= \lambda^2 X_0^* S X_0 + \lambda (X_0^* S X + X^* S X_0) + X^* S X$$

アルカラ, X_0 ガ regular ナラバ有限個ノ λ ヲ除ケ $\lambda X_0 + X$ ハ regular デアルコトガ分ル. $\lambda\lambda + X$ ハ $\lambda \to 0$ ノトキ明ラカニ X ニ近ヅク. 故ニ如何ナル X ノ近傍ニモ regular element ガ存在スル. 従ッテ singular part ハ至ル所密デナイ。

コノ結果カラ次ノコトガ分ル。

定理3.4. $\mathfrak{P}$ ハ singular part ヲ境界トスル有限個ノ regular part ノ和ニ分タレル。

§4. 計量基本式

$|S| \neq 0$ ナル場合ニハ regular part $\mathfrak{P}_\Delta$ ハ運動デ不変ナ計量ヲモ . 行ノ順序ヲ適当ニトッテ

$$(4.1) \qquad \Theta S \Theta = \Delta$$

トシ, コレニ相当シテ

$$(4.2)\qquad S=\begin{pmatrix}\Gamma & 0\\ 0 & \Delta\end{pmatrix}$$

トオク. コヽデΓ, Δ ハ共ニ ± 1 ヲ對角要素トスル對角行列デアルガ, 一般ニ

$$\begin{cases}\Gamma^2=1\\ \Delta^2=1\end{cases}$$

ナルトキ次ノ定理ガ成立ツ.

定理4.1. $Z=\begin{bmatrix}Z\\1\end{bmatrix}$ ニ対シテ ds^2 ヲ

$$(4.3)\qquad ds^2=S_p(\Delta+Z^*\Gamma Z)^{-1}dZ^*(\Gamma+Z\Delta Z^*)^{-1}dZ$$

ト定義スレバ, ds^2 ハ運動デ不変デアル.

証明. 任意ノ $Z\in\mathfrak{D}_\Delta$ ハ適當ナ運動デ θ ニ移サレル. 故ニ

$$(a)\qquad T\theta=\begin{pmatrix}Z\\1\end{pmatrix},\qquad T^*ST=S$$

ナルTニツイテ

$$T\,dW=dZ$$

トシタトキ, (4.3)デ與ヘラレル ds^2 ガ

$$ds^2=S_p\Delta\,dW^*\Gamma\,dW$$

ヲ満足スルコトヲ言ヘバ定理ハ証明セラレル. $T=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ トオケバ (a) ナル関係ハ

$$(b)\qquad B=ZD$$

及ビ

$$(c)\qquad\begin{cases}A^*\Gamma A+C^*\Delta C=\Gamma\\ B^*\Gamma B+D^*\Delta D=\Delta\\ A^*\Gamma B+C^*\Delta D=0\end{cases}$$

ト書カレル．(c)＝(b)ヲ入レルト，最後ノ式カラ

$$(d)\qquad C=-\Delta Z^{*}\Gamma A\,;$$

真中ノ式カラ

$$D^{*}(Z^{*}\Gamma Z+\Delta)D=\Delta$$

ヲ得ル．又Cノ値ヲ(c)ノ最初ノ式ニ入レルト

$$A^{*}\Gamma(\Gamma+Z\Delta Z^{*})\Gamma A=\Gamma$$

ガ出ル．簡単ノタメ

$$\begin{cases}\Delta+Z^{*}\Gamma Z=F\\ \Gamma+Z\Delta Z^{*}=G\end{cases}$$

トオケバ，スナハチ

$$(e)\qquad\begin{cases}D^{*}FD=\Delta\\ A^{*}\Gamma G\Gamma A=\Gamma\end{cases}$$

次ニT $dW=dZ$ カラ dZ ヲ求メルト，$B=ZD$ ヲ用ヒテ

$$\begin{aligned}dZ&=(A\,dW+ZD)(C\,dW+D)^{-1}-Z\\&=(A-ZC)\,dW\,D^{-1}\end{aligned}$$

ヲ得ル．(d)カラ $A-ZC$ ヲ求メレバ

$$A-ZC=A+Z\Delta Z^{*}\Gamma A=G\Gamma A$$

トナル．故ニ

$$dZ=G\Gamma A\,dW\,D^{-1}$$

従ッテ

$$\begin{aligned}ds^{2}&=S_p\,F^{-1}dZ^{*}G^{-1}dZ\\&=S_p\,F^{-1}D^{*-1}dW^{*}A^{*}\Gamma G^{-1}\Gamma A\,dW\,D^{-1}\\&=S_p\,(D^{*}FD)^{-1}dW^{*}(A^{*}\Gamma G\Gamma A)\,dW\end{aligned}$$

トナル．故ニ(e)ニヨッテ

$$ds^2 = Sp \Delta dW^* \Gamma dW$$

コレデ定理ガ証明サレタ．

次ニ運動デ不変ナ計量ハ常数因子ヲ除ケバ一意的ニ定マルコトヲ示サウ．コノタメニレーツノ Hermite 形式ヲ不変ナラシメル変換群ノ不変式ニツイテ考ヘル．Hヲ $\det H \neq 0$ ナル Hermite 行列トシ，$\mathfrak{z} = (z^1, z^2, \cdots\cdots, z^n)$ ニ對シテ．

$$(4.4) \quad h(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^* H \mathfrak{z}$$

ニヨッテ Hermite 形式 $h(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})$ ヲ定義スル．一次変換 $\mathfrak{z} \to \mathfrak{y} = \mathfrak{U}\mathfrak{z}$ ガ $h(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})$ ヲ不変ナラシメルタメノ必要且充分ナ條件ハ明カニ

$$(4.5) \quad \mathfrak{U}^* H \mathfrak{U} = H$$

デアル．コノ様ナ変換 $\mathfrak{U}$ 全体ノ作ル群ヲ $\mathfrak{G}_H$ トスル．スルト

定理4.2　m個ノ vector $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_m$ ノ mn 個ノ成分 z_i^j ノ Hermite 形式 $h(\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_m)$ ガ $\mathfrak{G}_H$ ノ変換 $\mathfrak{z}_j \to \mathfrak{U}\mathfrak{y}_j$ $(j = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ デ不変ナラバ，$h(\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_m)$ ハ

$$(4.6) \quad h(\mathfrak{z}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_m) = \sum a_{jk} h(\mathfrak{z}_j, \mathfrak{z}_k), \qquad a_{kj} = \bar{a}_{jk}$$

ナル形ヲモツ．

証明．H ハ適當ナ変換デ對角行列ニ直セルカラ，始メカラ

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_n \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_j = \pm 1$$

トシテ一般性ヲ失ハナイ. 先ヅ

Lemma. $h(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) = h(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \neq 0$ ナラバ $\mathfrak{y} = \mathfrak{U}\mathfrak{z}$ ナル $\mathfrak{O}_H$ ノ変換 $\mathfrak{U}$ ガ存在スル.

何トナレバ, 假定カラ, $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2, \cdots\cdots \mathfrak{z}_n$ 及ビ $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{y}_n$ ナル一次独立ナ vector ノ組ヲ

$$h(\mathfrak{z}_j, \mathfrak{z}_k) = h(\mathfrak{y}_j, \mathfrak{y}_k) = \lambda_j \delta_{jk}$$

ナルヤウニ選ベルコトが分ル. コレヲ用ヒテ

$$\mathfrak{y}_j = \mathfrak{U}\mathfrak{z}_j$$

ニヨツテ一次変換 $\mathfrak{U}$ ヲ定義スレバ, 明ラカニ $\mathfrak{y} = \mathfrak{U}\mathfrak{z}$ デアツテ $H = \mathfrak{U}^* H \mathfrak{U}$ ガ成立ツ.

サテ vector ノ個数 m ニ関スル帰納法ニヨツテ定理ヲ証明シヨウ. 今 $m-1$ 個ノ vector ニツイテハ既ニ定理が証明サレタトスルト

$$h(0, \mathfrak{z}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_m) = \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} a_{jk}\, h(\mathfrak{z}_j, \mathfrak{z}_k)$$

ト現ハサレル. $\mathfrak{z}$ ヲ

$$h(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) = \varepsilon_1 \lambda^2, \qquad \lambda > 0$$

ナル vector トスレバ, $\mathfrak{z}$ ヲ $\mathfrak{y} = (\lambda, 0, \cdots\cdots, 0)$ ニ移ス $\mathfrak{O}_H$ ノ変換が存在スル. コノ変換ニヨツテ $\mathfrak{z}_j$ ハ $\mathfrak{y}_j$ ニナツタトシヨウ. スルト

$$h(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{z}_m) = h(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{y}_m)$$

$$=\alpha\lambda^2+2\,\mathcal{R}e\,\lambda\sum\sum\alpha^j_\nu z^\nu_j+\sum\sum a_{jk}h(y_j,y_k)$$

但シココデ z^ν_j ハ y_j ノ νー成分ヲ表ハス．$\mathfrak{O}_H$ ハ又

$$(z^1,z^2,\cdots\cdots,z^n)\to(z^1,-z^2,\cdots\cdots,-z^n)$$

ナル変換ヲ含ム．$h(y,y_2,\cdots\cdots,y_m)$ ガコノ変換デ不変ナルタメニハ

$$\alpha^j_2=\alpha^j_3=\cdots\cdots=\alpha^j_n=0$$

デナケレバナラヌ．故ニ，$\lambda^2=\varepsilon_1h(y,y)$，$\lambda z^1_j=\varepsilon_1h(y,y_j)$ デアルカラ

$$h(y,y_2,\cdots\cdots,y_m)$$
$$=\alpha\varepsilon_1h(y,y)+2\,\mathcal{R}e\sum\alpha^j_1\varepsilon_1h(y,y_j)+\sum\sum a_{jk}h(y_j,y_k)$$

コレデ定理ガ証明サレタ。

定理4.3．$|S|\neq0$ ナルトキ非ユークリッド空間 $\mathfrak{P}_\Delta$ ノ運動デ不変ナ計量ハ常数因子ヲ除ケバ唯一通リニ定マル。

証明．$\theta^*S\theta=\Delta$ トスル．$\mathfrak{P}_\Delta$ ハ運動群ニ関シテ *transitive* デアルカラ，θ ヲ動カサナイ運動ニ関シテ不変ナ θ ノ周リノ計量ガ一義的ニ定マルコトヲ示セバ定理ハ証明セラレル．S ヲ

$$S=\begin{pmatrix}\Gamma&0\\0&\Delta\end{pmatrix};\quad \Gamma=\begin{pmatrix}\gamma_1&&0\\&\ddots&\\0&&\gamma_n\end{pmatrix},\quad \Delta=\begin{pmatrix}\delta_1&&0\\&\ddots&\\0&&\delta_m\end{pmatrix}$$

トオク．．スルト θ ヲ動カサナイ運動ハ

(a) $\quad Z\to UZV;\quad U^*\Gamma U=\Gamma,$

$$V\Delta V^*=\Delta$$

ナル形ヲトル．ds^2 ハ dZ ノ *Hermite* 形式デ，コノ (a) ナル

変換デ不変デナケレバナラヌ.[6] 先ヅ

$$dZ=(dy_1,\ldots\ldots, dy_m)$$

トオクト, dZ ハ変換 $\mathfrak{U}$ デ

$$\mathfrak{U}dZ=(\mathfrak{U}dy_1,\ldots\ldots,\mathfrak{U}dy_m)$$

トナル. ds^2 ハスナハチ $\mathfrak{G}_\Gamma$ ノ不変式デアル. 故ニ前定理ニヨッテ

$$(b)\quad ds^2=\sum a_{jk}\,dy_j^*\Gamma dy_k=\sum a_{jk}\gamma_\ell\overline{dZ_{\ell j}}dZ_{\ell k}$$

ナル形ヲモツ. 次ニ

$$dZ=\begin{pmatrix} dy'_1\\ \vdots\\ \vdots\\ dy'_n\end{pmatrix}$$

ト考ヘレバ, ds^2 ハ $\mathfrak{G}_\Delta$ ノ不変式デアルカラ

$$(c)\quad ds^2=\sum b_{jk}\,dy_j^*\Delta dy_k=\sum b_{jk}\delta_\ell\overline{dZ_{j\ell}}dZ_{k\ell}$$

(b)ト(c)ヲ合セルト

$$ds^2=g\cdot\sum\gamma_j\delta_k|dZ_{jk}|^2=g\,S_p\,\Delta dZ^*\Gamma dZ$$

デナケレバナラヌコトガ出ル. 但シコヽデ g ハ常数デアル.

---

6) 一般ニ $z^j=x^j+iy^j$ $(j=1,2,\ldots\ldots,n)$ ナルトキ, dx^j, dy^j ノ二次形式ガ $z^j\to iz^j$ ナル変換デ変ラナイナラバ, ソレハ

$$ds^2=\sum g_{jk}\overline{dz}^j dz^k,\qquad g_{jk}=\overline{g_{kj}}$$

ナル形ヲモツ.