1047. 連續幾何學トZornノ補題

前田　文友（廣島大理大）

J. v. Neumann ノ連續幾何學ニ於テハ超限歸納法ガ屡々用ヒラレ，シカモ相似タ方法ガ繰リ返ヘサレテ煩ハシイ所ガアル．モシ超限歸納法ノ代リニ Zorn ノ補題ヲ用ヒタナラバ便利デアルダラウ．（Zorn ノ補題ニツイテハ，中山正氏 位相數學 4—1号 50—52 頁參照）．シカルニ連續幾何學ノ公理ソノモノニ，スデニ超限順序數ヲ用ヒテ居ル．即チ（可約）連續幾何學 L トハ補續完全束デ次ノ公理ヲ滿足スルモノデアル．

(A₁) Ω ヲ任意ノ超限順序數トスル．$\alpha \leqq \beta < \Omega$ ニ對シ $a_\alpha \geqq a_\beta$ デアルトキハ

$$\wedge(b \vee a_\alpha ; \alpha < \Omega) = b \vee \wedge(a_\alpha ; \alpha < \Omega)$$

デアル。

(A_2) (A_1)ニ双對的ナルモノ。

Zorn ノ補題ヲ用ヒルタメニ，コノ公理 (A_1), (A_2) ヲ超限順序數ヲ用ヒナイモノニ置キ換ヘルコトヲ試ミテ見タ。即チ (A_1), (A_2) ハ次ノ (B_1), (B_2) ト同義デアル。

(B_1) S ヲ L ノ任意ノ部分集合トスル。モシ S ノスベテノ有限部分集合 S_0 ニ對シテ

$$\wedge(b \vee a;\ a \in S_0) = b \vee \wedge(a;\ a \in S_0) \qquad (1)$$

ガ成立スルトキハ

$$\wedge(b \vee a;\ a \in S) = b \vee \wedge(a;\ a \in S) \qquad (2)$$

デアル。

(B_2) (B_1)ニ双對的ナルモノ。

$(B_1) \longrightarrow (A_1)$ ハ簡單ニ云ヘル。$\alpha \leqq \beta < \Omega$ ニ対シ $a_\alpha \geqq a_\beta$ ナルガ如キ集合 $S = (a_\alpha;\ \alpha < \Omega)$ ヲ考ヘルトキハ，S ノスベテノ有限部分集合 S_0 ニ對シテ (1) ガ成立スル。従テ (2) ガ成立スル。故ニ (A_1) ガ成立スル。

次ニ $(A_1) \longrightarrow (B_1)$ ヲ證明スル。モシ L ノ部分集合 S ノ中，(1) ガ成立スルノニ (2) ガ成立セザルガ如キモノアルトキハ，カヽル S ノ中ニテ最小ノ濃度 $\aleph'$ ヲ有スルガ如キ集合 K_0 ガ存在スル。假定ニヨリ K_0 ハ有限集合デハナイ。濃度ガ $\aleph'$ ナルガ如キ最小ノ順序數ヲ Ω トスルトキハ Ω ハ極限順序數デアッテ，K_0 ハ $(a_\alpha;\ \alpha < \Omega)$ ノ如クアラハサレ得ル。從ッテ $\gamma < \Omega$ ナルトキハ

$$\wedge(b \vee a_\alpha;\ \alpha < \gamma) = b \vee \wedge(a_\alpha;\ \alpha < \gamma)$$

故ニ　$\bigwedge(b \vee a_\alpha;\ \alpha < \Omega) = \bigwedge\{b \vee \bigwedge(a_\alpha;\ \alpha < \gamma);\ \gamma < \Omega\}$

然ルニ　$\gamma_1 \leqq \gamma_2 < \Omega$ ナルトキハ $\bigwedge(a_\alpha;\ \alpha < \gamma_1) \geqq \bigwedge(a_\alpha;\ \alpha < \gamma_2)$ デアルカラ (A_1) ヨリ

$$\bigwedge(b \vee a_\alpha;\ \alpha < \Omega) = b \vee \bigwedge(a_\alpha;\ \alpha < \Omega)$$

即チ K_Ω ニ於テモ (2) ガ成立スルコトニナッテ不合理デアル.

故ニ (B_1) ガ成立スル。

従ッテ連續幾何學ヲ論ズル場合ニ始メカラ (B_1), (B_2) ヲ公理トシテ置イテ，後ハ Zorn ノ補題ヲ用ヒテ行ケバ，超限歸納ヲ用ヒナイカラ幾分簡單ニナッテ来ル.