1041. Vector値集合函數ノRadon-Nikodym型定理ニ就イテ

小笠原 藤次郎(廣島文理大)

作用素表現論ヘノ應用ヲ目的トシテBanach空間ヲ値域トスル強有界變動完全加法的連續集合函數トBochner積分ノ意味ニ於テ可測函數ノ不定積分トノ關係ニツイテ論ズル. 具体的空間ノ線型作用素ノ核表現ヘノ應用ハ他ノ機會ニ於テ述ベル。

§1. Banach空間論ニ於テハ特ニ複素Banach空間論ヲ目的トスルモノハ極メテ少イ. ソレハ複素Banach空間ソレ自体ガ實Banach空間トシテ考察サレルコトト實Banach空間ノ定理ハ多クハソノ証明ノ必要ナ修正ニ依ッテ複素Banach空間ニ於ケル對應定理トナルコトニヨルト思ハレル。其ノ限界ヲ明ニスルコトハ無駄ナ努力トハ思ハレナイガ兎ニ角放置サレタママデアル。茲ニ於テ以下ノ§デ表レル概念ニツイテ一二ノ注意ヲ加ヘタイ。Zヲ複素Banach空間トシ之レヲ實Banach空間トシテ考察スルトキXデ表ス. 從ッテ $\bar{Z}$ ハZノ線型汎函數ノ複素共軛Banach空間ヲ $\bar{X}$ ハXノ線型汎函數ノ實共軛空間ヲ表スコトニナル. コノトキ次ノ命題

(1) Zハweakly completeデアル.

(2) Zハlocally weakly compactデアル.

(3) $\bar{Z}$ハlocally weakly compactデアル.

(4) Z ハ regular デアル。

ハ夫々ニ於テ Z ヲ X デ置換シテ得ラレル命題ト對等デアル。(2) ト (3) ハ對等ナ命題デアリ、(4) ガ成立スルトキ (2) ガ成立スル。可分ナ Z ニツイテ (2) ガ成立スルトキ (4) ガ成立スル。尚 Idelly ノ定理, 線型作用素トソノ共軛作用素ニツイテ弱完全連続ノ双對性等ガ成立スル。従ッテ記述ヲ簡単ニスル点カラ集合函數ノ値域ヲ実 Banach 空間トシテ可ナルコトガ知ラレル。

S ヲ抽象集合, $\mathfrak{B}$ ヲ S ヲ含ム S ノ部分集合ヨリナル Borel 族, $\alpha(E)$, $E \in \mathfrak{B}$ ヲ $\mathfrak{B}$ 上ノ非負完全加法的集合函數 (或ハ測度函数) トスル. 以下ニ於テハ $\alpha(S)$ ガ有限トシテヨイ. 何者 S ガ有限測度ノ可附番可測集合ノ和トシテ表セルトキ本質的ニ S ガ有限測度トシテ論ズレバ充分デアルカラ。

§2. X ヲ Banach 空間トシ $F(E)$, $E \in \mathfrak{B}$ ガ X ヲ値域トスル $\mathfrak{B}$ 上ノ完全加法的集合函數トスル. モシ $\alpha(E) = 0$ ノトキ常ニ $F(E) = 0$ トナルトキ $F(E)$ ハ $\alpha(E)$ ニ関シテ全連続或ハ単ニ全連續トイフ。

定理1. X ガ regular ノトキ α ニ関シテ全連続ナ完全加法的集合函数 $F(E)$ ハ強有界変動ノトキ Bochner 積分デ, 不定積分デアル。

定理2. 定理1ハ "X ガ regular" ノ代リニ "X ガ locally weakly compact" トシテモ成立スル。

(注意) 定理2ハ定理1ノ拡張デアルカラ定理2ヲ證明

スレバ充分。 $F(E)$ ガ可分値函数ノ場合ニハ既ニ Dunford-Pettis (Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1940) 323—392). Phillips (仝 48 (1940) 516—540) ガ本質的ニ証明サレル.

從ッテ定理2ノ証明ハ $F(E)$ ガ可分値ナルコトヲ証明スレバ充分デアル。

(注意) X ニ假定ヲ置ク代リニ $\left\{ \frac{F(E)}{\alpha(E)} \,\middle|\, E \in \gamma \right\}$ ガ conditionally weakly compact トシテモヨイ。

(注意) X ニ定理ノ假定ノ代リニ $\{F(E); E \in \gamma\}$ ヲ含ム最小ノ部分閉空間ノ determining manifold Γ ガ可分且ツ Γ ニ関シテ X ガ locally weakly compact 換言スレバ X ガ可分空間ノ共軛空間トナッテヰルトキハ一般ニハ Bochner ノ不定積分ニハナラナイガ此ノ場合ニハ Dunford-Pettis (上掲論文) ガ論ジテヰル。

定理2ノ証明. $\|F(E)\| \leqq \alpha(E)$ ノ場合ヲ証スレバ充分. 何者 $\sigma(E)$ ヲ E 上ニ於ケル $F(E)$ ノ強全変分トスレバ $\|F(E)\| \leqq \sigma(E)$ ガ成立スル. コノトキ $F(E) = \int_E x(\lambda)\, d\sigma$ トナッタトスル. 一方 $\sigma(E) = \int_E \sigma'(\lambda)\, d\alpha$ トカヽレルカラ $F(E) = \int_E \sigma'(\lambda)\, x(\lambda)\, d\alpha$ トナリ $\sigma'(\lambda)x(\lambda)$ ノ代リニ新ニ之レヲ $x(\lambda)$ ト書クトキ $F(E) = \int_E x(\lambda)\, d\alpha$ トナル. 故ニ上ノ假定ヲ置ク. α ニ関シテ可積分実函数ノ作ル L 空間ヲ $L(\alpha)$ トスルトキ

$$U_\varphi = \int_S \varphi(\lambda)\, dF, \quad \varphi \in L(\alpha) \qquad \text{トスレバ}$$

U ハ $L(\alpha)$ ノ単位球ヲ X ノ単位球ノ部分ニ移スカラ U ハ弱完全連續、從ッテ $L(\alpha)$ ノ weakly compact set ヲ X ノ compact set ニ移ス.（Phillips, 上掲論文定理5.5）

然ルニ可測集合ノ特性函数ノ全体ハ $L(\alpha)$ デ weakly compact. 從ッテ $\{F(E)\,|\,E \in \gamma\}$ ハ compact（compact ハ conditionally ノ意デアル）即チ $F(E)$ ハ可分値函數トナル. 從ッテ上ノ注意カラ成立スル。

（注意） L空間ヨリ任意ノ X ヘノ弱完全連續作用素ノ可分値ナルコト及ビソノ積分表現モ同樣ノ考ヘ方カラ得ラレル。

（注意） Bochner-Taylor ノ vector 値函數空間ノ理論ガ抽象集合 S ノ上デ展開サレル. Bochner-Taylor (Annals of Math. 39 (1938) 913—914) 岡澤（學士院記事 16 (1940) 68—72)

§3. 定理2ノ別証明.

α ニ關シテ可積分実函數ノ作ル L空間ヲ $L(\alpha)$ トスル. $f \in \overline{X}$ トシテ $f(F(E)) = \Phi(E) = \int_E \varphi(\lambda)\, d\alpha$ ト書ク. $\overline{X}$ ヨリ $L(\alpha)$ ヘ変換 $f \to \varphi(\lambda)$ ハ Kantorovitch ノ H°_{b} ニ屬スル

何者 $\|f\| \leqq 1$ ノトキ $|\Phi(E)| \leqq \sigma(E)$ ガ成立スルカラ. $\overline{X}$ ハ locally weakly compact 從ッテ $\overline{X}$ ノ単位球ノ像ハ compact. 故ニ φ ハ可分集合ヲ作ル. 從ッテ α ニ關シテ可分ナ γ ノ部分 Borel 族 γ' ガ存在シテ φ ハ γ' ニ關シテ可測トナル. $F(E)$ ハ γ' 上デ可分値函数、從ッテ γ' ニ關シテ可測ナ函数 $x(\lambda)$ ガ存在シテ $E \in \gamma'$ ノトキ $F(E) = \int_E x(\lambda)\, d\alpha$

トナル．コノ式ガ任意ノ $E \in \gamma$ ニ對シテ成立スルコトヲ証明スレバヨイ。

$E \in \gamma$ ノトキ $\int_E f(x(\lambda))\,d\alpha = f(F(E)) = \int_E \varphi(\lambda)\,d\alpha$ ヨリ $f(x(\lambda))$ ト $\varphi(\lambda)$ ハ *null set* ヲ除イテ一致スル．從ッテ任意ノ $E \in \gamma$ ニツイテ $\int_E f(x(\lambda))\,d\alpha = \int_E \varphi(\lambda)\,d\alpha$．コノ式ヨリ $f(F(E)) = f\left(\int_E x(\lambda)\,d\alpha\right)$ 即チ $F(E) = \int_E x(\lambda)\,d\alpha$ トナル。