1038. 單葉係數ニ就イテ

森本 博

$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ デ正則單葉トスルトキ $|a_2|\leqq 2$, $|a_3|\leqq 3$ ナルコトガヨク知ラレテオル。今逆ニ $|a_2|=2$ トスレバ $f(z)=\dfrac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$ (θ ハ實數) ナルコトガ容易ニ證サレルガ $|a_3|=3$ ナラバ如何?

果シテ $f(z)=\dfrac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$ トナルカ？ 之ハ仲々ムヅカシイ問題デアルガ、モシモ成立スルナラバ $|a_2|=2$ トナルベキデアル。

コヽデハ $|a_2|$ ガドノ程度ノ制限ヲ受ケルカニツイテ述ベヨウ。方法ハ例ノ Bieberbach ノ面積定理ヲ用フル方法デアル。

（定理） $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則単葉トスルトキ，モシモ $|a_3|=3$ ナラバ

$\sqrt{\dfrac{92}{27}}\leqq|a_2|\leqq 2$ デアル。

（証明） $$F(z)=\sqrt{f(z^2)}=z+\frac{1}{2}a_2z^3+\frac{1}{8}(4a_3-a_2^2)z^5+\cdots$$

トオケバ $F(z)$ ハ $|z|<1$ デ正則単葉トナル。

次ニ $$\phi(z)=\frac{1}{F(\frac{1}{z})}=z-\frac{1}{2}\frac{a_2}{z}+\frac{3a_2^2-4a_3}{8}\frac{1}{z^3}+\cdots$$

トオケバ $\phi(z)$ ハ $|z|>1$ デ正則単葉トナル故 Bieberbach ノ面積定理ニヨリ

$$\frac{1}{4}|a_2|^2+\frac{3}{64}|3a_2^2-4a_3|^2\leqq 1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}|a_2|^2+\frac{3}{64}\left(3|a_2|^2-4|a_3|\right)^2\leqq 1$$

之レヘ $|a_3|=3$ ヲ代入スレバ

$$\frac{1}{4}|a_2|^2+\frac{3}{64}(3|a_2|^2-12)^2\leqq 1$$

コノ不等式ヲ解ケバ

$$\sqrt{\frac{92}{27}} \leqq |a_2| \leqq 2$$

———— (完) ————