Vector lattice ニ於ケル「エルゴード」定理

小笠原 藤次郎（廣島文理大）

Bochner 條件（紙上數談 "regular vector lattice ニツイテ" 參照。L, (s) 空間等ハ此ヲ滿足スル）ヲ滿足スル vector lattice 及ビ R_2 空間デ簡單ナル「エルゴード」定理ヲ述ベタイ。考ヘ方ハ吉田氏, Riesz ニ倣フ。

§1. 定理1. X ヲ Bochner 條件ヲ滿足スル vector lattice, T ヲ X ヲ自身ニ變換スル (o)-連續線型汎函數且任意ノ $x \in X$ ニ對シ $\{T^n x\}$ $(n=1,2,\cdots)$ ハ (o)-有界トスルトキ

$$(o)\text{-}\lim_{n} \frac{Tx+T^2x+\cdots+T^n x}{n}$$

ガ存在スル。

（証） Bochner 條件ニ表ハレル正線型汎函數列 $\{f_n\}$ ヨリ $\rho(x)=\sum_n \frac{1}{2^n}\frac{f_n(|x|)}{1+f_n(|x|)}$ ト置クトキニ x ト y ノ距離トシテ $\rho(x-y)$ ヲトルトキ X ハ (F) 型空デ吉田氏ノ論法（學士院記事, 1940 ..., Mazur-Orlicz Studia Math. 4 (1933) 參照）ニ依ッテ

$$(o)\text{-}\overline{\lim_{n}}\frac{Tx+Tx^2+\cdots+T^n x}{n} = (o)\text{-}\underline{\lim_{n}}\frac{Tx+T^2x+\cdots+T^n x}{n}$$

ハ x ノ (t) ニ連續函數デアル。コノ式ヲ $\tilde{T}_x$ ト書クコトトスル。明ニ $\tilde{T}(x+y) \leqq \tilde{T}x + \tilde{T}y$. $\tilde{T}x = \tilde{T}(-x) \geqq 0$ ガ成立スル。

次ニ $\{T^n x\}$ ノ (α) ニ有界性ノ假定カラ $|T^n_x| \leqq e$ トシ e ヲ生成要素トスル主イデアール $\mathfrak{a}(e)$ ヲ考ヘ、コレヲ e ガ恒等的ニ 1 トナルヤウ表現 Boole 空間 Ω ノ連續函數ニ依ッテ表現スル $x \in \mathfrak{a}(e)$ ニ對應スル連續函數ヲ $x(\mathfrak{z}^*)$ デ表ス。

$$x_n = \frac{Tx + \cdots\cdots + T^n_x}{n}$$

トオクトキ、假定ヨリ $|x_n(\mathfrak{z}^*)| \leqq 1$. Ω ノ Borel 集合ニ測度ヲ導入シ第一種集合即チ測度零ノ集合トナラシメルコトガ出來ル。

コノタメニ正數列 $\alpha_n > 0$ ヲ $\sum \alpha_n f_n(e)$ ガ收斂スル様ニトリ f_n ニ依ッテ Ω ニ導入サレル測度函數 $\mu_n(E)$（第一種集合ヲ法トシテ E ト等シイ basic open set O_α ノ特性函數ヲ $e_\alpha(\mathfrak{z}^*)$ トスルトキ $\mu_n(E) = f_n(e_\alpha)$ ト置ク）ヨリ $\mu(E) = \sum \alpha_n \mu_n(E)$ ヲ作レバヨイ。$\mu(E)$ ヲ測度トスル L 空間ヲ考ヘルトキ $\{x_n(\mathfrak{z}^*)\}$ ハ L ニ於テ weakly compact 従ッテ部分列 $\{x_{n'}\}$ ヲトリ L デ弱收斂セシメルコトガ出來ル。コノ極限要素ヲ $\bar{x}$ トスル。

Riesz ノ論法カラ（Acta Szeged 10 (1941)）

$y_{n'} = \sum_{r=n'}^{m'} c_{n'r} x_r$, $c_{n'r} \geqq 0$ $\sum_r c_{n'r} = 1$ ヲトリ $y_{n'}$

ガ L デ $\bar{x} = (o)$-收斂．從ッテ X デ (o)-收斂サセルコトガ出来ル。任意ノ (o)-連續線型汎函數 f ニ對シ $f(Tx)$ モ (o)-連續線型汎函數トナルコトニ注意シテ f ヲ正トスルトキ

$$|f(Ty_{n'})-f(y_{n'})| \leqq \sum c_{n'r} f\left(\left|\frac{T-T^{r+1}}{r}x\right|\right)$$
$$\leqq \frac{2}{n'} f(e)$$

コレヨリ $f(T\bar{x}) = f(\bar{x})$ 即チ $T\bar{x} = \bar{x}$ 從ッテ $\tilde{T}\bar{x} = 0$．今 $y_{n'}$ ヲ $T^k x$ ノ項デ表シテ

$$y_{n'} = \sum_{1}^{m'} c'_k T^k x, \quad c'_k \geqq 0, \quad \sum c'_k = 1$$

トオキ $\quad x - \bar{x} = x - \sum c'_k T^k x + \bar{x}_{n'}$

トスレバ

$$\bar{x}_{n'} \to 0 \ (o)$$

此レ等ノ關係式カラ

$$\tilde{T}x = \tilde{T}(x-\bar{x}) \leqq \sum c'_k \tilde{T}(x - T^k x) + \tilde{T}\bar{x}_{n'}$$

然ルニ $\tilde{T}(x - T^k x) = 0$ ナルコトハ容易ニ分レ、マタ $n' \to +\infty$ ノトキ $\tilde{T}\bar{x}_{n'} \to 0 \ (t)$ コレヨリ $\tilde{T}x = 0$ ガ成立スル。

從ッテ $x_n \to \bar{x} \ (o)$ ナルコトガ證明サレタコトニナル。

§2. 次ニ X ヲ K_2 空間トシ要素列 $\{x_n\}$ ノ *presque borné* (Riesz 上掲論文) ノ定義ヲ次ノ如ク定メル。

定義．要素列 $\{x_n\}$ ニ對シ正要素 e ガ存在シ任意ノ

正数εニ対シ正数αガ定マリスベテノnニツイテ

$$\|x_n-(x_n \wedge \alpha e) \vee (-\alpha e)\| < \varepsilon$$

ガ成立スルトキ$\{x_n\}$ハ殆ド有界ナリト云フ。

定理，XヲK_2空間，TヲXヲ自身ニ変換スル(t)-連続線型作用要トスル。$\|T^n\|$有界ノトキアルxニツイテ$\{T^n x\}$ガ殆ンド有界ノトキ$n \to \infty$ノトキ次ノ式ハ強收斂スル。

$$\frac{Tx+T^2x+\cdots\cdots+T^nx}{n}$$

(証) $\left\{\frac{Tx+T^2x+\cdots\cdots+T^nx}{n}\right\}$ガ weakly compact ナルコトガ証明出来ルカラ。