1035. Kantorovitch ノ K_2 空間ト「エルゴード」定理

小笠原藤次郎（広島文理大）

普通ノ L 空間（Lebesgue 可積分函ノ作ル）デ (0)－有界集合ハ weakly compact デアル。コレガ「エルゴード」論ノアル種ノ定理ニ應用サレルコトハ吉田角谷氏ノ業績ト共ニ周知ノコトデアル。茲デハ Kantorovitch ノ K_2 空間（角谷氏ノ意味デノ抽象 L 空間モ結局 K_2 空間ニナルコトニ注意）デ (0)－有界集合ハ weakly compact デアルコト從ッテ上記ノ如キ「エルゴード」定理ハ K_2 空間ニ於テモ成立スルコトヲ証明スル。

定理 1. K_2 空間ノ任意ノ (0)－有界集合ハ weakly compact デアル。

(証) X ヲ K_2 空間 $|x_n| \leqq e$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ノトキ $\{x_n\}$ ノ弱收斂部分列ノ存在証明ガ目的。コノタメニ X ハ最初カラ次ノ假定ヲ満足スルモノトシテヨイ。(1) X ハ e ヲ単位トスル可分 K_2 空間デアル。(2) $\|f\|=1$, $f\in\overline{X}$ 且ツ $f(|x|)=0$ ノトキ $x=0$ トナル正線型汎函数ガ存在スル。

(1) ハ容易ニ分ルト思フ。(2) ハ (1) カラ濃度 $\aleph_0$ ノ total set ノ存在ヨリ。

e ヲ恒等的ニ 1 ナラシメル様ニ表現 Boole 空間 Ω ノ連続函数ニ X ノ要素ヲ表現スル。x ニ應ズルモノヲ $x(\mathfrak{p}^*)$

デ表ス。

コノトキ $f(x)=\int_{\Omega} x(g^*)\,d\mu$ トナル様 f ニヨッテ Ω ノ可測集合（Borel 集合ト第一種集合ノミ異ルモノ）ニ完全加法的測度 $\mu(E)$ ヲ導入スルコトガ出来ル。$\mu(\sigma)=0$ ト E ガ第一種集合トハ對等ナルコトニ注意スル。測度函数 μ ニ関スル可積分函数ヨリナル L 空間ヲ考ヘル。茲デ $x_n(g^*)$ ハ (o)－有界従ッテ部分列 $\{x_{n'}(g^*)\}$ ガ存在シテ Ω ノ連続函数 $x(g^*)$ ニ強收斂スル。

g ヲ $\overline{X}$ ノ任意ノ正要素トシテ g ニ對應スル測度ヲ $m(E)$ トスル。m ガ μ ニ関シテ Lipschitz ノ條件ヲ満足スルトキハ $\int_{\Omega} x_{n'}(g^*)\,dm = g(x_{n'})$ ハ $\int_{\Omega} x(g^*)\,dm = g(x)$ ニ收斂スルコトハ L ニ於ケル弱收斂ノ定義カラ明瞭。一般ノ場合ニツイテ考ヘル。m ハ μ ニ対シテ全連続デアルカラ任意ノ正数 $\varepsilon>0$ ニ対シ m ヲ二ツノ部分 m_1, m_2 ヲ分リ m_1 ハ μ ニ関シテ Lipschitz 條件ヲ満足スル測度函数, m_2 ハ全測度ガ ε ヨリ小ナ測度函数ニスルコトガ出来ル。$|x(g^*)|\leq 1$ ナルコトニ注意シテ

$$|g(x_{n'})-g(x)| = \left|\int_{\Omega}\{x_{n'}(g^*)-x(g^*)\}\,d(m_1+m_2)\right|$$

$$< \left|\int_{\Omega}\{x_{n'}(g^*)-x(g^*)\}\,dm_1\right| + 2\varepsilon$$

コレヨリ $n'\to\infty$ ノトキ $\overline{\lim}\,|g(x_{n'})-g(x)| \leq 2\varepsilon$, εハ任意デアルカラ $g(x_n) \to g(x)$.

故ニ証明セラレタ。

定理2. Tヲ R_2 空間Xヲ自分自身ノ内ヘ移ス線型作用素且ツ $\|T^n\| \leqq C$ $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル常数Cが存在スル。今アル要素 x ニツイテ常ニ $|T^n x| \leqq e$ が成立スル正要素 e が存在スルトキ，コノ x ニツイテ

$$\frac{Tx + T^2x + \cdots\cdots + T^n x}{n}$$

ハXノ一要素ニ $n \to \infty$ ノトキ強収斂スル。

(証) 前定理ト吉田氏ノ *mean ergodic theorem* カラ

定理3. Tヲ R_2 空間Xヲ自分自身ニ移ス線型作用素且ツ各々ノ $x \in X$ ニツイテ $\{T^n x\}$ が(o)−有界ノトキ

$$\frac{Tx + Tx^2 + \cdots\cdots + T^n x}{n}$$

ハ(o)−収斂ヲナス。

(証) 吉田氏. 日本数学輯報17(1940)31−36. 日本学士院記事16(1940)280−284参照スレバ定理1カラ容易ニ分ル。

吉田氏ノ上記ノ論文ノ他ノ諸定理モ R_2 空間ノ定理トシテ云ヒ表ハスコトが出来ルがコレハ単ニ吉田氏ノ論文ノ翻訳ニナルカラ止メル。コレニ関スル注意ニツイテハ紙上数学談話会"*regular vector lattice*"ヲ参照サレタイ。

定理1ノ証明中カラ見ラレルヤウニ$\bar{R}_2$空間ハL空間ノ部分空間ト見ナサレル。コノ見地カラ作用素論特ニ積分論ニ関係シタモノヲ調ベタイト思ッテヰル。$\bar{R}_2$空間ヲモット精密ニ調ベテ分類スル必要ガアルト思フガ今ノ処コノ方面ニハ殆ンド手ヲツケテイナイ。