1033. 條件附確率法則ノ定義ニ就テ

伊藤　清（内閣統計局）

differential デナイ stochastic process ヲ研究スルニハ，條件附確率法則トイフ概念ガ極メテ重要デアル。コヽデハソノ嚴密ナ定義ノ仕方ヲ述ベテ見ヨウト思フ。條件附確率ニツイテハ P. Lévy[1] ノ定義ガアリ、Kolmogoroff[2] ノ著ニモ載ッテヰルガ、ソレヲ基礎トシテ條附附確率法則ヲ定義スルコトハサ程無造作ニモ出來ナイト考ヘラレルノデ、ソレニ就テ述ベテ見ヨウト思フ。最初注意スベキコトヲノベル。

I. 確率變數ニ關スル「許サレル」概念構成ニ就テ

---

(1) P. Lévy: Théorie de l'addition des variables aleatoires P. 68

(2) Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinkeitsrechnung P. 45

§1. 確率ノ場. Ωヲ抽象空間トシ, FヲΩノ部分集合ノ加法族[3]トスル. Pヲ集合(F)[4]ノ加法函數[5]デ, 且ツ

$$P(E)\geqq 0$$

$$P(\Omega)=1$$

トスルトキ, Pヲ(Ω, F)ノ上ノ確率ト呼ブ. EヲΩノ任意ノ部分集合トスル時,

$$\overline{P}(E)=\sup\{P(E');\ E'\in F,\ E'\subset E)$$

$$\underline{P}(E)=\inf\{P(E');\ E'\in F,\ E'\supset E)$$

トシ, $\overline{P}(E)=\underline{P}(E)$ノトキ, EヲP−可測ト云ヒ, コノ共通ノ値ヲ再ビ$P(E)$ト書クト, Pハ前ノPノ拡張ニナッテヰル. $\Omega = F, P$ヲ結ビツケテ考ヘル時之ヲ確率ノ場ト云フ。

E_1, E_2ヲP−可測集合トシ

$$P(E_1 \sim E_2)=0$$

ノトキ, $E_1 \sim E_2$ト定義シ, E_1トE_2トハ同等ナリト呼ブ事ニスルト

$$E \sim E$$

$$E_1 \sim E_2 \longrightarrow E_2 \sim E_1$$

$$E_1 \sim E_2,\ E_2 \sim E_3 \longrightarrow E_1 \sim E_3$$

---

(3) S. Saks: Theory of the integral p. 7

(4) 集合(F)トイフノハ集合族Fニ属スル集合トイフ意ニ用ウルコトニスル.

(5) S. Saks: loc. cit. p. 8.

デアッテ「～」ハ一種ノ equivalence relationト考ヘ得ル。

§2. 確率変数. Xヲ抽象空間トシ、F_XヲXノ部分集合ノ加法族トスル. 今Ωノ上ノ殆ンド到ル所(P)[6]ニテ定義セラレタXノ上ノ値ヲトル函数$x(\omega)$ガアッテ, 集合(F_X) Eノ原像$x^{-1}(E)$ガ常ニP-可測ナルトキ$x(\omega)$ガP-可測ト云ヒ, カヽル函数ヲ(Ω, F, P)上ノ(X, F_X)-値ヲトル確率変数ト云フ。

二ツノ確率変数x_1, x_2ガアッテ, $P(x_1 = x_2) = 1$ナルトキ, $x_1 \sim x_2$トイフコトニスルト,「～」ハ一種ノ equivalence relation デアル. 同等ナ確率変数ハ区別シナイ方ガ妥当デアル。ソレ故確率変数ノ属性トシテハ同等ナ確率変数ニハ同ジ結果ヲ与ヘルモノノミガ「許サレル」。

$x^{-1}(E)$ 即チ $E\{w; x(\omega) \in E\}$ ヲ表ハスノニ$(x \in E)$ナル命題ソノモノヲ以テスルコトガ conventional use ト一致スル。$E \in F_X$ノトキ$\{x \in E\}$ハ「許サレル」概念デアル. $x \sim x'$ナラバ$\{x \in E\} \sim \{x' \in E\}$ナル故. 又$P(x \in E)$モ亦「許サレル」概念デアル。

§3. 確率変数ノ函数. xヲ(Ω, F, P)上ノ$(X\ F_X)$-値ヲトル確率変数トシ, fヲ$(X\ \ F_X\ \ P_x)$上ノ殆ンド到ル所(P_x)デ定義セラレタ$(Y\ F_Y)$-値ヲトル

(6)「P-測度0ノ例外ヲ除イテ」トイフコトヲ「殆ンド到ル所(P)ニテ」トイフ。

P_x－可測ナ函數トスル。$f(x)$ ハ $(\Omega\ F\ P)$ 上ノ確率変數ト考ヘルコトガ出来ルガ、$x \sim x'$ (P)[17]，$f \sim f'$ (P_x) ナラバ $f(x) \sim f'(x')$ ナル故，$f(x)$ ハ「許サレル」概念デアル。

§4. 確率変數ノ結合. Aヲ可附番集合トシ、x_α $(\alpha \in A)$ ヲ夫々 $(X_\alpha\ F_\alpha)$－値ヲトル確率変數トスル。$\alpha \in A$ ニ對スル X_α ノ積空間ヲ X トシ、X ノ筒集合ヲ含ム最小ノ加法族ヲ F_X トスルト，$x \equiv (x_\alpha ; \alpha \in A)$ ハ (X, F_X)－値ヲトル確率変數ト考ヘルコトガ出来ル。蓋シ x_α ノ定義サレナイ ω ノ集合ヲ N_α トシ、$\bigcup_{\alpha \in A} N_\alpha = N$ トスレバ

$$P(N) \leqq \sum_{\alpha \in A} P(N_\alpha) = 0$$

（Aガ可附番集合ナルコトニ注意!!）

故ニ x ハ $\Omega - N$ デ即チ Ω ノ上ノ殆ンド到ル所 (P) ニテ定義サレテヰル。又 F_X ノ定義ニヨリ、ソノ P－可測性ハ明ラカデアル。又 $x_\alpha \sim x'_\alpha$ $(\alpha \in A)$ ナラバ $(x_\alpha ; \alpha \in A) \sim (x'_\alpha ; \alpha \in A)$ ナル故，$x_\alpha (\alpha \in A)$ カラ $(x_\alpha ; \alpha \in A)$ ヲ作ルコトハ「許サレル」概念構成デアル。コレヲ $x_\alpha (\alpha \in A)$ ノ結合ト呼ブコトニスル。結合ヲ作ル場合、Aガ可附番ナルコトガ決定的ナ役割ヲ演ジテ居ル。

後ニ非可附番個ノ確率変數ノ結合モ考ヘルガ、ソノ場合特別ナ條件ガ必要デアル。

§5. 確率変數ノ極限値

---

(17) $x \sim x'$ ハ P ニ關シテ $x \sim x'$ ノ意.

$x_1, x_2 \cdots\cdots$ 及ビ x ヲ或ル距離空間ノ値ヲトル確率変数トスル時

$$\bigwedge_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigwedge_{n=m}^{\infty}\left\{\rho(x_n, x) < \frac{1}{k}\right\}$$ ハ P－可測デアル。

ソノ確率ガ1ナル時ニ

"$x_1, x_2 \cdots\cdots$ ハ x ニ殆ンド確実ニ収斂スルトイヒ $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ニテ表ハス"

$x_1 \sim x_1', x_2 \sim x_2', \cdots\cdots, x \sim x'$ デアルトキ，$x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ナラバ $x' = \lim_{n\to\infty} x_n$，又

$$P\left\{\bigwedge_{k=1}^{\infty}\bigvee_{m=1}^{\infty}\bigwedge_{p,q>m}\left(\rho(x_p, x_q) < \frac{1}{k}\right)\right\} = 1$$

ナルトキ $x_1, x_2 \cdots\cdots$ ヲ殆ンド確実ニ収斂スル確率変数ト云フ。$x_1 \sim x_1'$，$x_2 \sim x_2'$，$\cdots\cdots$ ナラバ x_1' $x_2' \cdots\cdots$ モ亦殆ンド確實ニ収斂スル変数列トナル。而シテコノ時

$$\lim x_n = x$$

ナル x ガ必ズ存在シ、而モ equivalence ヲ除イテ一義的ニ定マル。殆ンド確実ニ収斂スル変数列ノ極限変数モ亦「許サレル」概念デアル。

任意ノ正数 ε ニ対シテ

$$P\{\rho(x_n, x) > \varepsilon\} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ノ時，x_n ハ x ニ確率収斂スルト云ヒ，

$$x = P\text{-}\lim x_n$$

ヲ表ハスコトニスル。$x_n \sim x'_n\,(n=1,2,\cdots\cdots)\ x \sim x'$ デ $P\text{-}\lim x_n = x$ ナラバ $P\text{-}\lim x'_n = x'$

次ニ

$$P\{\rho(x_m, x_n) > \varepsilon\} \longrightarrow 0 \quad (m, n \to \infty)$$

ナルトキ，$\{x_n\}$ ヲ確率收斂スル変數列トイフ。コノトキ $P\text{-}\lim x_n$ ナル x ハ必ズ存在シ且ツ equivalence ヲ除イテ一義的ニ定マル。

「確率收斂スルトイフ事」「確率收斂スル変數列ノ極限値」ハイヅレモ「許サレル」概念デアル。

收斂，極限値ノ定義ハ経數ガ有理數ノ場合ニモナサレ得ル。例ヘバ有理數 r ニ依存スル。確率変數 x_r ガアリ、S ヲ任意ノ実数トスルトキ $r \to S$ ニ対シテ x_r ガ收斂スルトイフノハ

$$P\Big(\bigwedge_{k=1}^{\infty}\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{\substack{|r-s|<\frac{1}{n}\\|r'-s|<\frac{1}{n}}}\Big(\rho(x_r, x_{r'})<\frac{1}{k}\Big)\Big)=1$$

トイフコトデアル。之ガ「許サレル」概念タル事ハ明カデアル。（有理数ガ可附番集合ナル事ニ注意!!）

II. 條件附確率法則

§1. 條件附確率　x ヲ (X, F_x) ー値ヲトル確率変數トシ，A ヲ Ω ノ Pー可測集合トスル。E ヲ P_xー可測ナ任意ノ集合トスル時

$$P\{(x \in E), A\}$$

ハ E ノ加法函數デ

$$0 \leqq P\{(x \in E)\cdot A\} \leqq P\{x \in E\} = P_x(E)$$

故ニ X ノ上ノ上ノ始ンド到ル所 (P_x) デ定義セラレタ点函數 $\psi(\lambda)$ ガアッテ

$$P\{(x \in E)\cdot A\} = \int_E \psi(\lambda)\, P_x(d\lambda)$$

今 $\psi(x)$ ナル「確率変數 x ノ函數」ヲ考ヘ，之ヲ $P(A/x)$ ニテ表ハシ，x ノ定マッタトキ A ノ成立スル條件附確率ト云フ。

$$x \sim x' \qquad A \sim A'$$

ナラバ $P(A/x) \sim P(A'/x')$ ナル故，之ハ「許サレル」概念デアル。

§2. separable ナ加法族

Ω ノ上ノ集合ノ加法族 F ノ部分集合 G ヲ含ム最小ノ加法族 B(G) ガ F ト一致スルトキ，G ヲ F ノ base ト云フ事ニスル，F ガ enumerable base ヲモツトキ，F ヲ separable ト云フ。

今 0 ト 1 トノ間ノ有理數 r ニ依存スル F ノ元 E_r ガアッテ，$\Gamma = \{E_r\}$ ハ F ノ base デアリ，且ツ

(1) E_r ハ r ニ関シテ単調非減少

(2) $\lim\limits_{r\to 1-} E_r = \Omega \qquad \lim\limits_{r\to +0} E_r = 0$ （0 ハ空集合ヲ表ス）

(3) $\lim\limits_{s\to r+} E_s = E_r$

ナルトキ，$\{E_r\}$ ヲ normal base トイフ。v. Neu-