1032. Krull ノ豫想ニツイテ, III

中山　正（阪大）

I、II デ Krull ノ vollständig ganz-abgeschlossen ナ整域ニ關スル豫想ニ対スル反例ヲノベタ。コノ豫想ノ反例ガ出来タ以上大体期待シウルコトデアルガ、同様ニシテ Krull ノ他ノモウ一ツノ問題（トイフホド大キナ事デハナイガ）ヲ解決スルコトガ出来ル。

即チ Zeitschr. 41 ノ前ニモ引用シタ論文デ「vollständig ganz-abgeschl. ナ整域デハ任意ノ主いでやるガ höchst-dimensional ナ Primärideale ノ Durchschnitt トシテ表ハサレル」トイフ様ナコトガアルカモ知レナイト述ベテアル（669頁ノ脚注4））。（コヽニ höchstdimensional ナ Primärideal トハ minimal ナ素いでやるニ属スル Primärideal ノコトデアル。上記ノコトハ例ヘバ尤モ簡単ナ場合デイヘバ

超曲面ハ既約ナ超曲面ニワカルコトニ帰ル(ソシテ勿論ソレハ正シイ))。

以下コノ問題モ否定的ニ解決サレルコトヲ述べル。

I, II ニ於ケルト同様ニ適當ナ complete ぶーる束(タトヘバ $(0,1)$ ノ開集合 mod. nowhere dense set ノナスぶーる束)ノ表現空間ナル totally disconnected びこむぱくと空間 Ω デ、ソノ任意ノ点 p ニ對シテ $f(p)=\infty$ デアッテ ∞ ニナルノハ nowhere dense set ニ於テノミナル整数及ビ $\pm\infty$ ヲトル連續函數 f が存在スル如キモノヲ考ヘル。

II ニオイテ Ω ノ各点 p ニ変数 x_p ヲ型式的ニ對應サセ、多項式列 $\{F(p_1 \cdots\cdots p_s), P\}$ ナル概念ヲ導入シタ。(コヽニ P ハ Ω ニオケル第一種集合)ソノ全体ハーツノ vollständig ganz-abgeschr. ナ整域 R ヲナシ、ソレが Krull ノ豫想ノ反例ニナッテヰルノデアッタ。

今 R ノ次ノ如キ一ツノ部分整域 R_0 ヲ考ヘル。即チ多項式列ノ中デ

(※) P ニ属サヌ点 $p_1, \cdots\cdots, p_s$ ニ対シテ近傍 $U_1, \cdots\cdots, U_s$ ヲ適當ニトレバソレゾレ $U_1, \cdots\cdots, U_s$ ニ属シ P ニ属サヌ $q_1, \cdots\cdots, q_s$ ニ對シテハ $F(q_1 \cdots\cdots q_s)$ ハ $F(p_1 \cdots\cdots p_s)$ カラ単ニ変数 x_{p_i} ヲ x_{q_i} トシタモノニナッテヰル。

トイフ條件ヲミタシテヰルモノノ全体ヲ R_0 トスル。R_0 が

環ヲ，即チ R ノ部分整域ヲナスコトハ明カデアル。

而モ R_0 ノ二元 $\{F_1; P_1\}$, $\{F_2; P_2\}$ ニオイテ前者ガ<u>R ノ中デ</u>後者デワレルナラバ<u>R_0 ノ中</u>デモワレル．即チ $\{F_1; P_1\} = \{F_2; P_2\}\{F_3; P_3\}$ $(\{F_3; P_3\} \in R)$ ナラ當然 $\{F_3; F_3\} \in R_0$ デアル。コレモ容易ニ明カデアラウ。

コノ事カラ R_0 モ *vollständig ganz-abgeschr* ナルコトガワカル。

扨テ R_0 ノ一ツノ元 $\{F; P\}$ ヲ考ヘル．或ル $\gamma \in \Omega - P$ ヲ考ヘル．γ ヲフクム $\{\gamma, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_s\}$ $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_s \notin P)$ ニ對シテ多項式 $F(\gamma, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_s)$ ヲワル x_γ ノ最高巾ヲ $f_\gamma(\gamma\gamma_1 \cdots\cdots \gamma_s)$ デ表ハス．然ラバ $\{\gamma, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_s\}$ ガ $\{\gamma, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_t\}$ ノ一部分ナラバ $f_\gamma(\gamma\gamma_1 \cdots\cdots \gamma_s) \geqq f_\gamma(\gamma\gamma_1 \cdots\cdots \gamma_t)$ デアル。

故ニ或ル $\{\gamma, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_s\}$ ガアッテソレヲフクム $\{\gamma, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_t\}$ $(\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_t \notin P)$ ニツイテハ $f_\gamma(\gamma\gamma_1 \cdots\cdots \gamma_t)$ ガスベテ一定ニナッテヰル．今ソノ値ヲ f_γ デアラハス．コレニヨッテ $\Omega - P$ ノスベテノ点 γ ニ対シテ f_γ ナル整数 $(\geqq 0)$ ガ與ヘラレル。

而シテ (※) ナル條件カラ明ラカナル如ク f_γ ハ $\Omega - P$ デ連續デアル．ヨッテ $\Omega - P$ デハ $f(\gamma) = f_\gamma$ ナル Ω 全体ニ於ケル整數及ビ $+\infty$ 値連続函数 f デ $+\infty$ ニナルノハ *nowhere dense set* ノミナルモノガ存在スル。

Ωデノ整數及ビ$\pm\infty$値連續函數デ$\pm\infty$ナルノハ *nowhere dense set* ハミナルモノノ全体ハ一ツノ *complete* ナ束群 $\mathcal{L}$ ヲナシ, 以前ソレヲ考察シテソレハイカナル實數値函数デデモ表現出来ナイコトヲ述ベタノデアッタ、即チ f ハコノ束群 $\mathcal{L}$ ノ元デアル。即チ R_0 ノ元 $\{F; P\}$ ニハ $\mathcal{L}$ ノ元 f ガ對應スル。

R_0 ノ二元 $\{F; P_1\}$, $\{G; P_2\}$ ニ對シテ上ノ如キ $f_\mathfrak{z}$, $g_\mathfrak{z}$ ヲ考ヘレバ $P_1 \cup P_2$ ニ属サヌ $\mathfrak{z}$ ニ對シテハ両元ノ和ニ對スル同様ナ函数 $h_\mathfrak{z}$ ハ $h_\mathfrak{z} \geqq \min(f_\mathfrak{z}, g_\mathfrak{z})$ デアルカラ両元ノ和ニ對應スル $\mathcal{L}$ ノ元 h ハ $h \geqq f \frown g$ ヲミタス. 同様ニシテ両元ノ積ニ對應スル $\mathcal{L}$ ノ元 k ハ $k = f + g$ ナルヲ知ル。

サテ、Ω ノ一点 $\mathfrak{z}$ ヲ考ヘル. 上ノ考察ニヨリ $f(\mathfrak{z}) = +\infty$ トナル R_0 ノ元 $\{F; P\}$ ノ全体ハ(空デナイ)いでやる $\mathfrak{a}_\mathfrak{z}$ ヲナス. 而モ素いでやるナルコトモ上記ヨリ明カデアル。

今整域 R_0 ノ任意ノ一ツノ *minimales Primideal* $\mathfrak{p}$ ヲ考ヘル. 二ツノ場合ヲ考ヘル. 1) アル $\mathfrak{z} \in \Omega$ ニ対シテ $\mathfrak{a}_\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{p}$ (実ハIニオイテ述ベタ注意ト同様ニ実ハコノ場合ハオコラナイ) 2) イカナル $\mathfrak{z} \in \Omega$ ニ対シテモ $\mathfrak{a}_\mathfrak{z} \not\subseteq \mathfrak{p}$.

先ヅ1)ノ場合ニハ $\mathfrak{p}$ ハ *minimal* ダカラ $\mathfrak{a}_\mathfrak{z} = \mathfrak{p}$.

2)ノ場合. イカナル $\mathfrak{z}$ ニ對シテモ, $\mathfrak{a}_\mathfrak{z}$ ノ元

$\{F^{(\mathfrak{z})};P^{(\mathfrak{z})}\}$ デ $\mathfrak{k}$ ニ属サヌモノガアル．ソレニ對應スル $f^{(\mathfrak{z})}\in\mathfrak{L}$ ハ $f^{(\mathfrak{z})}(\mathfrak{z})=+\infty$ ヲミタス．$\mathfrak{z}$ ノ適當ナ近傍 $U_{\mathfrak{z}}$ ヲトレバ $f^{(\mathfrak{z})}(\eta)\geqq 1$ $(\eta\in U_{\mathfrak{z}})$ トナル．コノ様ナ $U_{\mathfrak{z}}$ ノ有限個 $U_{\mathfrak{z}_1},\cdots\cdots,U_{\mathfrak{z}_n}$ デ Ω ヲオホフ。

$$\{F:P\}=\{F^{(\mathfrak{z}_1)};P^{(\mathfrak{z}_1)}\}\cdots\cdots\{F^{(\mathfrak{z}_n)};P^{(\mathfrak{z}_n)}\}$$

トスレバ $\mathfrak{k}$ ハ素いでやるダカラ，コノ元ハ $\notin\mathfrak{k}$ デアル．ソレニ對應スル $\mathfrak{L}$ ノ元 f ハ $f=f^{(\mathfrak{z}_1)}+\cdots\cdots+f^{(\mathfrak{z}_n)}$ デアリ、従ツテ Ω ノスベテノ点デ $\geqq 1$ デアル。

今 $\{X;空\}$ ヲスベテノ $\mathfrak{z}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{z}_s\in\Omega$ ニ対シテ $X(\mathfrak{z}_1\cdots\cdots\mathfrak{z}_s)=x_{\mathfrak{z}_1}\cdots\cdots x_{\mathfrak{z}_s}$ ナル多項式列 $(\in R_0)$ トスル．コレニ對スル $\mathfrak{L}$ ノ元ハ $\mathbb{1}$ $(\mathbb{1}(\mathfrak{z})=1)$ ニ他ナラヌ。

上記1)ノ場合勿論 $\{X;空\}\notin\mathfrak{k}$ デアル．2)ノ場合ニモ Ω ノ第一種集合 P ヲ除イテノ $\mathfrak{z}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{z}_s$ ニ対シテ $F(\mathfrak{z}_1\cdots\cdots\mathfrak{z}_s)$ ガ $x_{\mathfrak{z}_1}\cdots\cdots x_{\mathfrak{z}_s}$ デワレル．故ニ $\{F;P\}$ ハ R_0 ノ中デ $\{X;空\}$ デワレル．故ニ $\{X;空\}\notin\mathfrak{k}$ デアル。

$\mathfrak{k}$ ハイカナル *minimales Primideal* デモヨイ．故ニ $\{X;空\}$ ハイカナル *minimales Primideal* ニモフクマレナイ。

故ニ勿論イカナル *höchst dimensionales Primärideal* ニモフクマレナイ．シカシ勿論素いでやる $\{X;空\}$ ハ *unit ideal* デナイ．コレデ始メ

ニ述ベタコトノ反例ガ出来タ。