1030. 超フックス群トエルゴード定理

小平　邦彦(東大)

近頃菅原先生ニヨッテ一般フックス群ノ理論ガ展開サレテオル。[1] ソノ尤モ特殊ナル場合ハ"超フックス群"ノトキデアルガ,[2] コノ場合ニハ容易ニ一種ノ"Poisson積分"ヲ導入スルコトガ出来,コレヲ用ヒルコトニヨッテ,負定曲率面ニ於ケル測地的流レノ測度可遷性ノ証明ヲ吾々ノ場合ニ拡張スルコトガ出来ル。
以下コレヲ述ベル。

§1. 運動群トソノ不変式. n次元ノ複素数ヲ成分トスルVektor全体ノ作ル空間Rヲ考ヘ,一般ニRノVektorヲ$z, w, \zeta, \alpha, \cdots\cdots$デ表ハスコトトシ,内積及ビnormヲ,unitär空間ト考ヘテ

$$(z\ w) = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots\cdots + z_n\overline{w_n}$$

$$|z| = \sqrt{(z\ z)}$$

ト定義スル。Rハ又$2n$次元Euklid空間ト考ヘラレル。カク考ヘタトキ,Vektor zノ長サハ$|z|$デアリ,

---

1) M. Sugawara: Über eine allgemeine Theorie der Fuchsschen Gruppen und Theta Reihen, Ann. Math. 41, 488–494; 等参照。

2) K. Morita: A Remark on the Theory of General Fuchsian Groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo. Vol. 17, 233–237.

z ト w ノ間ノ角 $\widehat{zw}$ ハ

$$\cos \widehat{zw} = \frac{\mathcal{R}_e(zw)}{|z||w|}$$

デ與ヘラレル。

超フックス群ノ理論デハ $\mathcal{R}$ ノ "單位球"

$$\mathfrak{A} = (z;\ |z| \leqq 1)$$

ガ基礎トナル，$\mathfrak{A}$ ハ條件：

$$u^* S u = S \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$$

ヲ満足スル．$n+1$ 階ノ matrix：

$$u = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

ヲ用ヒテ作ラレタ変換

$$(1.1) \qquad z \longrightarrow w = (Az+B)(Cz+D)^{-1}$$

デ $\mathfrak{A}$ 自身ニ寫サレル，変換 (1.1) ハ逆一意的デアル．コレヲ $\mathfrak{A}$ ノ運動ト名付ケル．$\mathfrak{A}$ ノ運動ノ全体ハ明シカニ群ヲ作ル．コレヲ $\mathfrak{A}$ ノ運動群トヨブ。コレニ関シテ次ノ基本的ナ定理ガ成立ツ。

定理1. $\mathfrak{A}$ ノ内点 α ($|\alpha| < 1$) ヲ任意ノ内点 β ヘ移ス運動ガ存在スル．コノ運動ハスベテ次式デ與ヘラレル：

$$z \longrightarrow w : \quad \frac{\sqrt{1-|\beta|^2}}{1-(w\beta)}(1-\beta\beta^*)^{-\frac{1}{2}}(w-\beta)$$

$$= \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{1-(z\alpha)} \, U (1-\alpha\alpha^*)^{-\frac{1}{2}} (z-\alpha).$$

但シ，コヽデ U ハ或ル unitar 行列，$1-\alpha\alpha^*$ 等ハソノ $(j\ k)$ - Element ガ $1-\alpha_j\bar{\alpha}_k$ ナル行列ヲ現ハス。[3)]

コノ定理カラ，特ニ 0 ヲ変ヘナイ運動ハ unitar 変換：

$$z \longrightarrow w = Uz, \qquad U^*U = 1$$

デ與ヘラレルコトガ分ル。任意ノ運動 $z \longrightarrow w$ ガ與ヘラレタトキ，0 ニ移サレル点ヲ α トスルナラバ，又直チニ次ノ定理ガ得ラレル。

定理 2．任意ノ運動ハ

$$z \longrightarrow w = \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{1-(z\alpha)} \, U (1-\alpha\alpha^*)^{-\frac{1}{2}} (z-\alpha),$$

$$U^*U = 1$$

ナル形ニ現ハサレル。

又定理 1 カラ直ニ分ル如ク

$$ds^2 = \frac{|(1-zz^*)^{-\frac{1}{2}} dz|^2}{1-|z|^2} \tag{1.2}$$

ハ運動デ変ラナイ。今コヽデ座標軸ヲ適當ニ廻轉シテ $z = (z, 0\,0 \cdots\cdots 0)$ ナルヤウニスレバ (1.2) ハ

$$ds^2 = \frac{1}{1-|z|^2} \left\{ |dz|^2 + \frac{|z|^2 |dz_1|^2}{1-|z|^2} \right\}$$ トナル。元ノ座

---

3) 上記赤田氏ノ論文参照。

標軸ニ於シテ書ケバ $|z|^2 |dz_1|^2 = |(dz\ z)|^2$ デアルカラ：

定理 3. 線素

$$(1.3)\qquad ds^2 = \frac{1}{1-|z|^2}\left\{ |dz|^2 + \frac{|(dz\cdot z)|^2}{1-|z|^2} \right\}$$

ハ運動群ノ不変式デアル。

次ニ運動ニヨッテ $\mathfrak{A}$ 内ノ Euklid 的 Volumen-element ガ如何ニ変換サレルカラ調ベヨウ。コノタメニハ unitär 変換デハ Volumenelement ハ変ラナイカラ

$$(1.4)\qquad z \to w = \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{1-(z\,\alpha)}\,(1-\alpha\alpha^*)^{-\frac{1}{2}}(z-\alpha)$$

ナル運動ヲ考ヘレバヨイ。座標軸ヲ適当ニ選ンデ $\alpha = (\alpha, 0 \cdots\cdots 0)$ ナル様ニシテオケバ, (1.4) ハ

$$(1.5)\qquad \begin{cases} z_1 \to w_1 = \dfrac{z_1 - \alpha_1}{1 - z_1\bar{\alpha}_1} \\[2ex] z_j \to w_j = \dfrac{\sqrt{1-|\alpha_1|^2}}{1 - z_1\bar{\alpha}_1}\cdot z_j \qquad (j \geqq 2) \end{cases}$$

ト書カレル。コレヨリ

$$(1.6)\qquad \begin{cases} dw_1 = \dfrac{1-\alpha_1\bar{\alpha}_1}{(1-z_1\bar{\alpha}_1)^2}\,dz_1 \\[2ex] dw_j = \dfrac{\sqrt{1-|\alpha_1|^2}}{(1-z_1\bar{\alpha}_1)^2}\cdot\left(dz_j + \bar{\alpha}_1(z_j\,dz_1 - z_1\,dz_j)\right). \end{cases}$$

故ニ簡単ナ計算ニヨッテ

$$\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right| = \left(\frac{\sqrt{1-|\alpha_1|^2}}{1-z_1\bar{\alpha}_1}\right)^{n+1}$$

得ル．z, w ニ於ケル Euklid 的 Volumenelement ヲ夫々 dv_z, dv_w トスレバ

$$dv_w = \left(\text{abs.}\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|\right)^2 dv_z$$

デアルカラ，一般ノ座標系ニ戻シテ書ケバ

$$(1.9)\qquad dv_w = \left(\frac{1-|\alpha|^2}{|1-(z\bar{\alpha})|^2}\right)^{n+1} dv_z$$

スナハチ

定理 4. Volumenelement:

$$\left(\frac{1-|z|^2}{|1-(z\bar{\zeta})|^2}\right)^{n+1} dv_z$$

ハ運動群ノ不変式デアル。

特ニ $\zeta = z$ トオケバ

$$(1.8)\qquad d\sigma_z = \frac{dv_z}{(1-|z|^2)^{n+1}}$$

ガ不変式ナルコトガ分ル。$d\sigma_z$ ハ Linienelement (1.3) ヲ計量基本式ト考ヘタトキノ Riemann 空間 $\mathfrak{U}$ ノ Volumenelement ニ他ナラナイ。

最後ニ $\mathfrak{U}$ ノ Oberflächenelement ノ変換ヲ考ヘル．コノタメニ $\mathfrak{U}$ ノ表面上ニ一点 z ヲトッテ，z ニ於テ normal ナ Linienelement

$$dz = z\cdot dr,\qquad (dr>0)$$

ヲ作ル．(1.5)ナル運動ニヨッテ z ガ w ニ移サレタトスルト，dz ハ

$$dw: \begin{cases} dw_1 = \dfrac{1-\alpha_1\bar{\alpha}_1}{(1-z_1\bar{z}_1)^2} z_1 \cdot dr \\ dw_j = \dfrac{\sqrt{1-|\alpha_1|^2}}{(1-z_1\bar{\alpha}_1)^2} z_j \cdot dr \end{cases}$$

トナル．コノ dw ノ normal ナ成分ハ

$$d\rho = |dw| \cos d\widehat{w\ w} = \Re e(dw\ w)$$

デ與ヘラレル．コレヲ計算スレバ

$$d\rho = \frac{1-|\alpha|^2}{|1-(z\alpha)|^2} dr$$

サテ $\mathfrak{N}$ ノ Euklid 的 Oberflächenelement dF_z ガ(1.5)ナル運動ニヨッテ dF_w トナッタトスルト，$dv_z = dr\, dF_z$，$dv_w = d\rho\, dF_w$ デアルカラ，(1.7)ニヨッテ

$$(1.9) \quad dF_w = \left(\frac{1-|\alpha|^2}{|1-(z\alpha)|^2}\right)^n dF_z$$

ヲ得ル．Oberflächenelement モ亦 unitär 変換デ変ラナイカラ：

定理 5．Oberflächenelem.....

$$\left(\frac{1-|z|^2}{|1-(z\zeta)|^2}\right)^n dF_\zeta$$

ハ運動群ノ不変式デアル．

§2．非ユークリッド幾何．　運動群ノ不変者トシテ

$\mathfrak{A}$ ノ内部ニ一ツノ幾何ガ定メラレル。コレヲ非ユークリッド幾何。(N.E.-Geometrie) トヨブ。

$$ds^2 = \frac{1}{1-|z|^2}\left\{|dz|^2 + \frac{|(dz\ z)|^2}{1-|z|^2}\right\}$$

ハ不変式デアルカラ，コレヲ N.E.-空間 $\mathfrak{A}$ ノ計量基本式ト考ヘルコトガ出来ル。

カク考ヘルコトニスレバ $\mathfrak{A}$ ハスナハチ Riemann 空間トナル。$\mathfrak{A}$ ノ測地線ハスベテ 0 ヲ通ル Euklid 的直線ト“合同”デアリ，逆ニ 0 ヲ通ル Euklid 的直線ト合同ナル曲線ハスベテ測地線デアル。[4] 吾々ハコレヲ N.E.-Gerade トヨブ事ニスル。

N.E.-空間トシテノ $\mathfrak{A}$ ニハ Oberfläche ハ含マレナイケレドモ，N.E.-Gerade ハ Oberfläche マデ連続的（Euklid 空間トシテ）ニ延長セラレル。

定理 6. $\mathfrak{A}$ ノ内部又ハ表面ニアル二点ガ与ヘラレタトキ，コレヲ通ル N.E.-Gerade ガ必ズ存在シテ唯一通リニ定マル。

証明. 与ヘラレタ二点 w, ζ ノ一方ガ $\mathfrak{A}$ ノ内部ニアル場合ニハ明白デアル。w, ζ 共ニ表面上ニアル場合ヲ考ヘルタメニ，表面上ニ一点 z ヲトッテ，運動 (1.5) ニヨル z 及ビ $-z$ ノ像ヲ ζ^+, ζ^- トスル。一般ニ (1.5) ニヨ

---

4) G. Fubini: The distance in general fuchsian geometries, Proc. N.A.S., Vol. 26, (1940) 700—708.

ッテ z, z' ガソレゾレ w, w' ニ移サレタトスレバ

$$(2.1)\quad (ww') = 1 - \frac{(1-zz')(1-|\alpha|^2)}{(1-(z\alpha))(1-(\alpha z'))}$$

デアル故ニ

$$(\zeta^+\zeta^-) = 1 - \frac{2(1-|\alpha|^2)}{(1-(z\alpha))(1+(\alpha z))}$$

サテコヽデ $z=(1,0,\cdots\cdots 0)$ トオキ, $\alpha=(ix, y, 0,\cdots\cdots, 0)$ トスレバ

$$(\zeta^+\zeta^-) = 1 - \frac{2(1-x^2-y^2)}{1-x^2+2ix}$$

或ハ

$$(2.2)\quad \frac{1-x^2+2ix}{1-x^2-y^2} = \frac{2}{1-(\zeta^+\zeta^-)}$$

今 $(\zeta^+\zeta^-)$ ガ始メ任意ニ與ヘラレタトスルト, $|(\zeta^+\zeta^-)|\leqq 1$, 又 $\zeta^+\neq\zeta^-$ トスレバ $(\zeta^+\zeta^-)\neq 1$ デアルカラ,

$$\frac{2}{1-(\zeta^+\zeta^-)} = \rho e^{i\theta} \text{ トオケバ, } -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}, \text{ 且 } \rho \geqq \frac{1}{\cos\theta}$$

デアル. 從ッテ (2.2) ハ $x^2+y^2<1$ ナル real ナ解 (x, y) ヲ有ツ. スナハチ $(\zeta^+\zeta^-)$ ガ $\neq 1$ ナル任意ノ指定サレタ値トナル様ナ運動ガ存在スル。

サテ w, ζ ガ與ヘラレタトシ $\zeta=(1,0,\cdots\cdots 0)$, $w=(w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n)$ トオク。$w\neq\zeta$ ト考ヘテヨイカラ $(w\zeta)=w_1\neq 1$ デアル. 從ッテ $(\zeta^+\zeta^-)=w_1$ トナル様ナ運動ガ存在スル. 更ニ unitär 変換ヲ行ッテ ζ^- ヲ ζ ニ

移ス. コノトキζ^{+}ノ像ヲw'トスレバ$w'=(w_1', w_2', \cdots\cdots, w_n')$デアル コヽニ於テ$|w|=|w'|=1$ダカラ

$$\sum_{j\geq 2}|w_j|^2=\sum_{j\geq 2}|w_j'|^2.$$ 故ニζヲ変ヘナイunitär変換ヲ行ッテw'ヲwニ移スコトガ出来ル。スナハチ$\mathfrak{Z}, -\mathfrak{Z}$ヲ任意ノ二点$w, \zeta$ニ移ス運動ガ存在スルノデアル. コノ事カラ$w$ト$\zeta$ヲ結ブN.E.-Geradeガ存在スルコトハ直チニ分ル. コレガ一義的ニ定マルコトヲ示スニハ, 又$\mathfrak{Z}$ト$-\mathfrak{Z}$ヲ変ヘナイ運動ニヨッテ$\mathfrak{Z}$ト$-\mathfrak{Z}$ヲ結ブGeradeガ変ラナイコトヲ示セバヨイ。

今コノ$\mathfrak{Z}$及ビ$-\mathfrak{Z}$ヲ変ヘナイ運動ヲ定理ムデ述ベタ形ニ現ハシタトスレバ, 内積ハUニヨッテ変ラナイカラ(2.1)カラ

$$1-\frac{2(1-|\alpha|^2)}{(1-(\mathfrak{Z}\alpha))(1+(\alpha\mathfrak{Z}))}=-(\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z})=-1$$

スナハチ

$$|\alpha|^2+2i\,\Im(\alpha\,\mathfrak{Z})-|(\alpha\,\mathfrak{Z})|^2=0$$

デナケレバナラヌ. コレヨリ

$$\alpha=a\mathfrak{Z}, \qquad a\text{ハ real}$$

ナルコトガ分ル. $\mathfrak{Z}=(1, 0, \cdots\cdots 0)$トスレバコノ運動ハ

$$\begin{cases} z_1\to w_1=\dfrac{z_1-a}{1-z_1 a} \\ z_j\to w_j=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{1-z_1 a}\cdot z_j \end{cases}$$

デアル．コレニヨッテ z ト $-z$ ヲ結ブ Gerade ガ変ラナイ事ハ明白デアラウ。

注意：　N.E.-Gerade ヲ測地線トイフコトカラ離レテ，O ヲ通ル Euklid 的 Gerade ニ合同ナル曲線ト定義スルコトガ出来ル．カク考ヘタ場合ニモ，与ヘラレタ二点ノ一方ガ $\mathfrak{U}$ ノ内部ニアル場合ニハ定理 6 ハソノ一方ヲ O ニ移ス事ニヨッテ容易ニ証明セラレル．

定義．二点 z，w ガ与ヘラレタトキ，コレヲ結ブ N.E.-Gerade ニ沿ッテ作ッタ積分 $\int ds$ ヲ z ト w ノ N.E.-距離ト名付ケ $s(z, w)$ ヲ表ハス 即チ

$$s(z,w)=\int_z^w ds$$

容易ニ知ラレル如ク

$$(2.3)\qquad s(0,z)=\frac{1}{2}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

デアル．コレヲ逆ニトケバ

$$(2.4)\qquad |z|=\tanh s(0,z)$$

一般ニ z，w ガ与ヘラレタトキ，ソノ一方ヲ O ニ移シテ見レバ，(2.1) ト (2.4) カラ直チニ

$$\tanh^2 s(z,w)=1-\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-(z\bar{w})|^2}$$

ヲ得ル。

O ヲ中心トスル Euklid 半径 r ノ球 K_r ハ又 N.E-球デアッテ，ソノ半径ハ

$$l=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$$

デアル．球殻 $K_{r+dr}-K_r$ ノ N.E.－Volume ハ，(1.8) カラ明カナル如ク

$$d\sigma=\frac{\Omega r^{2n-1}}{(1-r^2)^{n+1}}dr$$

デ與ヘラレル．但シコヽデ Ω ハ單位球ノ Euklid 的表面積ヲ現ハス．dr ヲ N.E.－Metrik デ計レバ

$$dl=\frac{dr}{1-r^2}$$

デアル．從ツテ K_r ノ N.E－表面積 $w_r=d\sigma/dl$ ハ

$$(2.5)\quad w_r=\frac{1}{(1-r^2)^n}\Omega r^{2n-1}$$

吾々ハ K_r ヲソノ N.E.－半徑 l ヲ用レテ $K(l)$ ト書ク事トシ，ソノ表面ヲ $O(l)$ デ現ハス．$1-r^2=(\cosh l)^{-2}$ デアルカラ，$O(l)$ ノ N.E.－面積 $w_r=\omega(l)$ ハ

$$\omega(l)=(\cosh l)^{2n}\Omega r^{2n-1}$$

一般ニ $O(l)$ 上ノ Flächenelement ノ Euklid 的面積 dF ト N.E.－面積 $d\omega$ ノ關係ハ

$$(2.6)\quad d\omega=(\cosh l)^{2n}dF$$

デ與ヘラレル。

§3. Poisson 積分．吾々ハ Flächenelement (1.9) ヲ用ヒテ作ッタ積分：

$$u(z)=\frac{1}{\Omega}\int_{|\zeta|=1}\left(\frac{1-|z|^2}{|1-(z\ \zeta)|^2}\right)^n u(\zeta)\,dF_\zeta$$

ヲ Poisson 積分ト呼ブコトニスル. 以下簡単ノタメ

$$P(z\ \zeta)=\frac{1}{\Omega}\left(\frac{1-|z|^2}{|1-(z\ \zeta)|^2}\right)^n$$

トオイテ，コノ積分ヲ

$$(3.1)\qquad u(z)=\int_{|\zeta|=1} P(z\ \zeta)\,u(\zeta)\,dF_\zeta$$

ト現ハス. $u(\zeta)$ ガ Ω ノ表面デ Lebesgue 可測，且 $\int|u(\zeta)|\,dF_\zeta<+\infty$ ナラバ，積分(3.1)ハ $|z|\leqq r<1$ デ絶対且ツ一様ニ収斂シ，$u(z)$ ハ $|z|<1$ デ連続デアル。定理5デ示シタ如ク $P(z\ \zeta)\,dF_\zeta$ ハ運動デ変ラナイ。従ッテ今一ツノ運動ヲ $z\to w=S(z)$ ト表ハセバ

$$u(S(z))=\int P(S(z)\ \zeta)\,u(\zeta)\,dF_\zeta$$
$$=\int P(z\ S^{-1}(\zeta))\,u(\zeta)\,dF_{S^{-1}(\zeta)}$$

トナル. ココニ於テ $S^{-1}(\zeta)$ ヲ新シク ζ ト書クコトニスレバ次ノ定理ヲ得ル:

定理17. Ω ノ運動ヲ $z\to S(z)$ ト現ハセバ

$$(3.2)\qquad u(S(z))=\int_{|\zeta|=1} P(z\ \zeta)\,u(S(\zeta))\,dF_\zeta$$

コノ(3.2)ニ於テ $u(\zeta)\equiv 1$ オケバ $u(S(z))=\int_{|\zeta|=1} P(z\ \zeta)\,dF_\zeta$

ヲ得ルガ，$S(z)=0$ ナル如ク S ヲ定メレバ，一般ニ定義カラ明ラカナル如ク

$$(3.3)\qquad u(0)=\frac{1}{\Omega}\int_{|\zeta|=1} u(\zeta)\,dF_\zeta$$

デアルカラ

$$(3.4)\qquad \int_{|\zeta|=1} P(z\ \zeta)\,dF_\zeta=1$$

ヲ得ル。

定理8. (平均値ノ定理). *Poisson* 積分 $u(z)$ ノ N.E.－球面上ニ於テ作ッタ平均値ハソノ中心ノ値ニ等シイ. スナハチ $O(\alpha\ l)$ ヲ α ヲ中心トスル半径 l ノ N.E.－球面トスレバ

$$\frac{1}{\omega(l)}\int_{O(\alpha\ l)} u(z)\,d\omega_z=u(\alpha)$$

コレヲ証明スルタメニハ，定理7ニヨッテ明ラカナル如ク $\alpha=0$ ナル場合ヲ考ヘレバヨイ。コノ場合 $O(0\ l)=O(l)$ ハ *Euklid* ノ意味デモ球面デアル。一般ニ $O(l)$ 上ノ平均値ヲ考ヘルタメニ，ソノ *Flächenelement* ハ "*Winkelmaß*": $|z|^{1-2n}dF_z$ ヲ $d\Omega_z$ デ表ハスコトニスル. $d\Omega_z$ ハスナハチ dF_z ヲ半径1ノ球面上ニ射影シタトキノ面積デアル。

Unitär 変換: $z\to Uz$ ノ全体ハ運動群ノ *kompakt* ナ部分群ヲ作ル. コレヲ $\mathfrak{G}$ デ表ハスコトニシヨウ。$O(l)$ ハ明ラカニ $\mathfrak{G}$ ニヨッテ $O(l)$ 自身ニ移サ

レ，而モ $\mathfrak{G}$ ニ関シテ transitiv デアル。

故ニ $O(l)$ 上ノ連続函数 $f(z)$ ガ任意ニ與ヘラレタトキ，ソノ平均値ハ $f(S(z))$ ヲ $S\in\mathfrak{G}$ ノ函数ト考ヘテ作ッタ $\mathfrak{G}$ ノ上ノ平均値ト一致スル．

$$\frac{1}{\mathfrak{L}}\int_{|z|=const} f(z)\,d\mathfrak{L}_z = \underset{S\in\mathfrak{G}}{M}\, f(S(z))$$

コノ関係ハ容易ニ $f(z)$ ガ Lebesgue 可測ナ場合ニ拡張セラレル．スナハチコノ場合 $f(S(z))$ ハ S ノ函数トシテ $\mathfrak{G}$ ノ不変測度 m ニ関シテ可測デアッテ

$$(3.5)\qquad \frac{1}{\mathfrak{L}}\int_{|z|=const.} f(z)\,d\mathfrak{L}_z = \frac{1}{m(\mathfrak{G})}\int_{\mathfrak{G}} f(S(z))\,dm_S$$

コノ (3.5) ニヨッテ定理8ガ次ノ如ク証明サレル：先ヅ

$$\frac{1}{\omega(l)}\int_{O(l)} u(z)\,d\omega_z = \frac{1}{\mathfrak{L}}\int u(z)\,d\mathfrak{L}_z$$

$$= \frac{1}{m(\mathfrak{G})}\int u(S(z))\,dm_S$$

$$= \frac{1}{m(\mathfrak{G})}\int dm_S \int P(z,\zeta)\,u(S(\zeta))\,dF_\zeta$$

然ルニ $S(\zeta)$ ハ S,ζ ニ多数ニツイテ連続，従ッテ可測デアルカラ，$u(S(\zeta))$ モ S,ζ ニツイテ可測デアル。従ッテ $\int dm_S$ ト $\int dF_\zeta$ ガ交換セラレル。故ニ (3.4) ト (3.5) ニヨッテ

$$\frac{1}{\omega(l)}\int_{O(l)} u(z)\,d\omega_z = u(0)$$

ヲ得ル。

$P(z\ \zeta)$ ハソノ形カラ明カナル如ク，$|z|$ ガ充分 1 ニ近ヅケバ，z カラ離レタ ζ ニ對シテハ極メテ小サイ．實際簡単ナ計算ガ示ス如ク

$$|1-(z\ \zeta)| \geqq \frac{1}{2}|z-\zeta|^2$$

デアルカラ

$$(3.6)\qquad \Omega\cdot P(z\ \zeta) \leqq 4^n\left(\frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^4}\right)^n$$

コノ事カラ直チニ次ノ定理ヲ得ル．

定理9．$u(\zeta)$ ガ $|\zeta|=1$ デ連續ナラバ

$$\lim_{z\to\zeta} u(z) = u(\zeta)$$

一般ノ $u(\zeta)$ ニ對シテハ次ノ定理ガ成立スル．

定理10．$\displaystyle\int_{|\zeta|=1} |u(\zeta)|^2 d\Omega_\zeta < +\infty$ ナルトキハ

$$(3.7)\qquad \lim_{r\to 1}\int_{|\zeta|=1} |u(r\ \zeta)-u(\zeta)|^2 d\Omega_\zeta = 0$$

證明．$u(z)$ ハ (3.5) カラ明カナル如ク

$$u(z) = \frac{\Omega}{m(\mathfrak{g})}\int_{\mathfrak{g}} P(z\ S(\zeta))\,u(S(\zeta))\,dm_\zeta$$

ト書カレル．從ツテ

$$|u(r\zeta)-u(\zeta)|^2$$

$$=\left|\frac{\Omega}{m(\mathfrak{g})}\int_{\mathfrak{g}}P(r\zeta,\ S(\zeta))\{u(S(\zeta))-u(\zeta)\}dm_S\right|^2$$

コヽニ於テ $P(r\zeta,\ S(\zeta))dm_S$ ヲ $\mathfrak{g}$ ニ於ケル Volumenelement ト考ヘテ Schwarz ノ不等式ヲ用ヒレバ,

$$\frac{\Omega}{m(\mathfrak{g})}\int_{\mathfrak{g}}P(r\zeta,\ S(\zeta))dm_S=1$$ ニヨツテ

$$|u(r\zeta)-u(\zeta)|^2$$

$$\leqq\frac{\Omega}{m(\mathfrak{g})}\int_{\mathfrak{g}}P(r\zeta,\ S(\zeta))|u(S(\zeta))-u(\zeta)|^2dm_S$$

ヲ得ル。従ツテ

$$\int_{|\zeta|=1}|u(r\zeta)-u(\zeta)|^2d\Omega_\zeta$$

$$=\frac{\Omega}{m(\mathfrak{g})}\int_{\mathfrak{g}}|u(rT(\zeta))-u(T(\zeta))|^2dm_T$$

$$\leqq\left(\frac{\Omega}{m(\mathfrak{g})}\right)^2\iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}}P(rT(\zeta),\ ST(\zeta))|u(ST(\zeta))$$
$$-u(T(\zeta))|^2dm_S\,dm_T$$

然ルニ一般ニ $f(S,\ T)$ ガ $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ デ可測ナルトキハ

$$\iint f(ST,\ T)dm_S\,dm_T=\iint f(TS,\ T)dm_S\,dm_T$$

ガ成立ツ．上ノ式ニコノ変換ヲ行ヘバ

$$P(rT(\zeta),\ TS(\zeta))=P(r\zeta,\ S(\zeta))$$

デアルカラ，コレハ

$$\left(\frac{\Omega}{m(\mathfrak{G})}\right)^2 \int_{\mathfrak{G}} P(r\zeta, S(\zeta))\, dm_S \int_{\mathfrak{G}} |u(TS(\zeta)) - u(T(\zeta))|^2\, dm_T$$

トナル。然ルニ又 $\mathfrak{G}$ ノ上ノ函數 $u(T(\zeta)) = u(TS(\zeta))$ ヲ對應サセル寫像ハ stark-stetig デアル。[5] 從ツテ

$\lim_{S\to 1} \int_{\mathfrak{G}} |u(TS(\zeta)) - u(T(\zeta))|^2\, dm_T = 0$ デアルガ、

ζ ニ收斂スル點列 γ_n ニ對シテ $S_n(\zeta) = \gamma_n$. $\lim S_n = 1$ ナル $S_n \in \mathfrak{G}$ ヲ選ビ得ルコトカラ

$$\lim_{\gamma\to\zeta} \int_{\mathfrak{G}} |u(T(\gamma)) - u(T(\zeta))|^2\, dm_T = 0$$

ナルコトガ分ル。故ニ (3.4) ト (3.6) カラ定理9ノ証明ト同ジ考ヘニヨッテ

$$\lim_{r\to 1} \int_{|\zeta|=1} |u(r\zeta) - u(\zeta)|^2\, d\Omega_\zeta$$

$$\leqq \lim_{r\to 1} \frac{\Omega}{m(\mathfrak{G})} \cdot \int_{|\gamma|=1} P(r\zeta, \gamma)\, d\Omega_\gamma \int_{\mathfrak{G}} |u(T(\gamma)) - u(T(\zeta))|^2\, dm_T = 0$$

ヲ得ル。

———— 吾々ハ"調和函數"ヲ次ノ如ク定義スルコトニシヨウ。

定義. 円内ノ領域 G デ定義サレタ連續函數 $u(z)$

---

5) K. Kodaira: Über die Gruppe der meßbaren Abbildungen, Proc. Imp. Acad. Tokyo Vol. 17, 18–23.

ハ G 内ノスベテノ N.E.ー球面 $O(\alpha\ l)$ ニ於テ

$$\frac{1}{\omega(l)}\int_{O(\alpha\ l)} u(z)\,d\omega_z = u(\alpha)$$

ヲ満足スルトキ N.E.ー調和デアルト云フ。

コノ意味ニ於テ，如何ナル幾何ニ對シテモ，ソレニ屬スル"調和函数"ヲ考ヘルコトガ出来ル。$\Delta u=0$ デ定義サレル通常ノ調和函数ハカヽル考ヘ方カラスレバ Euklid 的調和函数トヨバルベキデアラウ。$n=1$ ノ場合ニハ N.E.ー調和函数ハ Euklid 的調和函数ト一致スルカラ，コノ様ナ區別ノ必要ガ表ハレナカッタノデアル。

定義カラ明ラカナル如ク，N.E.ー調和函数ガ常数デナイナラバ，ソレハ定義領域ノ内点デ最大値及ビ最小値ニ達シ得ナイ。從ッテモシソレガ領域ノ境界マデ入レテ連続ナラバ，ソレハ境界値ヲ與ヘレバ一義的ニ定マル。全領域 $\mathfrak{A}$ ニ於ケル境界値問題ハ定理 9 及ビ 10 ニヨッテ解カレテヰル。一般ノ領域ニ於ケル境界値問題ヲ解クコトハ可成困難デアラウ。[6]

定理 11. $\mathfrak{A}$ 内ノ領域 G デ定義サレタ解析函数 $f(z)$ ノ実数部及ビ虚数部ハ共ニ N.E.ー調和デアル。

---

6) コレヲ解クニハ次ノ方法ガ有効デアラウ: 先ヅ G ノ Rand デ與ヘラレタ函数ヲ G 内ニ連続的ニ延長シ，次ニソノ各点ニ於ケル値ヲソノ点ヲ中心トスル N.E.ー球面上ノ平均値デ置キ換ヘテ新シイ函数ヲ作ル。コレヲ繰返シテ極限ヲ取ルナラバ，ソレハ正ニ境界値問題ノ解ヲ與ヘルデアラウ。(角谷氏ニヨル)

証明. G内ノN.E.-球面 $O(\alpha\ l)$ ヲ考ヘ, O ヲ α ヘ移ス運動ヲ S トスル. 然ルトキハ

$$\frac{1}{\omega(l)}\int_{O(\alpha\ l)} f(z)\,d\omega_z = \frac{1}{\omega(l)}\int_{O(l)} f(S(w))\,d\omega_w$$

然ルニ $f(S(w))$, w ニツイテ analytisch デアルカラ, ソノ $O(l)$ 上ノ平均値ハ中心ニ於ケル値ニ等シイ. スナハチ

$$\frac{1}{\omega(l)}\int_{O(\alpha\ l)} f(z)\,d\omega_z = f(\alpha)$$

定理12. $f(z)$ ガ $|z|\leqq 1$ デ analytisch ナラバ

$$f(z)=\int_{|\zeta|=1} P(z\ \zeta)\,f(\zeta)\,d\Omega_\zeta$$

証明ハ $\Re f(z)$ 及ビ $\Im f(z)$ ガN.E.-調和ナルコトカラ明カデアラウ。

§4. 超Fuchs群トエルゴード定理. 運動群ノdiskretナル部分群ヲ超Fuchs群トヨブ。超Fuchs群ハeigentlich diskontinuierlichデアル。[7] 一ツノ超Fuchs群ガ與ヘラレタトシテ, コノ群ニ属スル運動ニヨッテ互ニ移リ得ル $\mathfrak{R}$ ノ点ヲidentifizierenスレバ, 一ツノ空間 $\mathfrak{F}$ ガ得ラレル. $\mathfrak{F}$ ハ明ラカニanalytischナMannigfaltigkeitデアッテ, (1.3) デ與ヘラレル dS^2 ヲ計量基本式ト

---

7) M. Sugawara 1) 及ビ K. Morita 2) 参照.

考ヘレバ，lokal = homogenuous + Riemann 空間トナル．コレニ関シテ $n=1$ ノ場合ト全ク同様ニ次ノ定理ガ成立ツ．

定理13．N.E.－Volum $\sigma(\mathfrak{F})$ ガ有限ナルトキハ，$\mathfrak{F}$ 上ノ測地的流レハ測度可遷性ヲ有スル．

先ヅ $\mathfrak{A}$ 内ノ Linienelement：

$$(z, \varphi), \quad \varphi = dz/|dz|$$

ノ作ル空間 $\mathcal{L}$ ヲ考ヘル．$\mathfrak{A}$ ノ運動：$z \to S(z)$ ニヨッテ $\mathcal{L}$ ニハ"接触変換"

$$(4.1)\quad (z, \varphi) \to (w, \psi), \quad w = S(z),$$
$$\psi = dS(z)/|dS(z)|$$

ガ惹キ起サレル．$\mathcal{L}$ ハ明ラカニコノ (4.1) ナル変換ニ関シテ transitiv デアルガ，一方コノ中 $z=0$ ヲ変ヘナイ変換：$(z, \varphi) \to (uz, u\varphi)$ ハ 0 ニ於ケル Volumenelement：

$$d\sigma_0\, d\Omega_\varphi$$

ヲ変ヘナイ．コノ事カラ $\mathcal{L}$ ニ於テ，$z=0$ デハ $d\sigma_0\, d\Omega_\varphi$ ト一致シ変換 (4.1) デ変ラナイ Volumenelement $d\mu$ ガ存在シテ一意的ニ定マルコトガ分ル．

Linienelement $(z\ \ \varphi)$ ヲ与ヘルト z ヲ通リ $dz = \varphi|dz|$ ニ切スル測地線ガ一意的ニ定マル．従ッテコノ測地線ノ始点ト終点ヲ夫々 η_1，η_2 トシ，測地線上ノ Euklid 的中点カラ z ニ到ルN.E.－距離ヲSトスレバ，定理6デ示シタ如ク η_1 ト η_2 ヲ通ル測地線ハ一意的

ニ従スルカラ, Linienelement (z, φ) ハ座標 η_1, η_2, S ヲ用ヒテ

$$(\eta_1, \eta_2, S) \qquad (|\eta_1| = |\eta_2| = 1, \ -\infty < S < +\infty)$$

ト現ハサレル. 変換 (4.1) ハ, コノ座標ヲ用ヒテ書ケバ

$$(4.2) \quad (\eta_1, \eta_2, S) \to (S(\eta_1), S(\eta_2), S'),$$
$$S' = S + S_0(\eta_1, \eta_2, S)$$

ナル形ヲトル. サテ今コレデ S ニヨッテ 0 ニ移サレル点ヲ α トシ, $S(\eta_1) = \zeta_1$, $S(\eta_2) = \zeta_2$ トオケバ, (ζ_1, ζ_2) ハ廻転[8]デ変ラナイカラ, (2.1) カラ

$$\frac{1-(\zeta_1, \zeta_2)}{1-(\eta_1, \eta_2)} = \frac{1-|\alpha|^2}{(1-(\eta_1, \alpha))(1-(\eta_2, \alpha))}$$

ヲ得ル. コレヲ Oberflächenelement ノ変換ノ式 (1.9) ト比ベルコトニヨッテ

$$(4.3) \quad \frac{dF_{\zeta_1} dF_{\zeta_2}}{|1-(\zeta_1, \zeta_2)|^{2n}} = \frac{dF_{\eta_1} dF_{\eta_2}}{|1-(\eta_1, \eta_2)|^{2n}}$$

スナハチ $dF_{\eta_1} dF_{\eta_2} / |1-(\eta_1, \eta_2)|^{2n}$ ハ運動群ノ不変式ナルコトガ分ル. 従ッテ (4.2) ノ形カラ明ラカナル如ク $\mathfrak{f}$ ニ於ケル Volumenelement:

$$\frac{dF_{\eta_1} dF_{\eta_2} \, dS}{|1-(\eta_1, \eta_2)|^{2n}}$$

ハ変換 (4.2) ニヨッテ変ラナイ. 故ニ不変測度ノ一意性[9]カラ

---

8) unitary 変換ヲ廻転トイフコトニスル.

9) Haar 測度ノ一意性ノ一般化 !!

(4.4) $$d\mu = C\cdot \frac{d\Gamma_{\eta_1}\, d\Gamma_{\eta_2}\, dS}{|1-(\eta_1 \eta_2)|^{2n}}$$

デナケレバナラナイ。

又上ノ測地的流レニ對スル Phasenraum ハ，點 Fuchs 群ニ屬スル S カラ生ジタ接触変換ニヨッテ互ニ移リ得ル $\mathfrak{L}$ ノ点ヲ identifizieren スルコトニヨッテ $\mathfrak{L}$ カラ作ラレル．測地的流レハ (η_1, η_2, S) デ現ハセバ

$$T_t : (\eta_1, \eta_2, S) \longrightarrow (\eta_1, \eta_2, S+t)$$

デ與ヘラレル。(4.4) デ與ヘラレタ $d\mu$ ガコノ T_t ナル変換デ不変ナルコトハ明ラカデアラウ．定理13ノ測度可遷性ハコノ (4.4) ナル測度ニツイテ言ッテヰルノデアル。

サテ吾々ハ $n=1$ ノ場合ニ倣ッテ空間：

$$H = ((\eta_1, \eta_2);\ |\eta_1| = |\eta_2| = 1)$$

ヲ考ヘ，コノ H ニ

$$d\tau = \frac{1}{\pi^2}\, d\Omega_{\eta_1}\, d\Omega_{\eta_2}$$

ニヨッテ測度 τ ヲ導入スル．然ルトキハ定理13ハ $n=1$ ノ場合ト全ク同様ニシテ次ノ定理14ト同値デアルコトガ知ラレル。10)

定理14. $0 < (\mathfrak{g}) < +\infty$ ナルトキ H ノ可測部分集合 A ガ點 Fuchs 群ノスベテノ変換：$(\eta_1, \eta_2) \longrightarrow (S(\eta_1), S(\eta_2))$ ニ對シテ不変ナラバ $\tau(A) = 0$ カ然ラザレバ $\tau(H-A) = 0$ デアル。

---

10) コノ点ハ $n=1$ ノ場合ト全ク同ジデアルカラ省略スル。

E. Hopf: Ergodentheorie, 72頁参照。

コレヲ証明スルタメニ一般ニHデ定義サレタ可測函数 $u(\eta_1, \eta_2)$ ニ対シテ

$$(4.5)\quad u(z\ \ w) = \iint_{|\zeta|=|\nu|=1} P(z\ \zeta)P(w\ \nu)u(\zeta\ \nu)d\Omega_\zeta d\Omega_\nu$$

ニヨッテ二変数 z, w ノ N. だ一調和函数 $u(z\ \ w)$ ヲ定義スル. 然ルトキハ

$$(4.6)\quad u(S(z)\ S(w))$$
$$= \iint_{|\zeta|=|\nu|=1} P(z\ \zeta)P(w\ \nu)u(S(\zeta)\ S(\nu))d\Omega_\zeta d\Omega_\nu;$$

且ツ $\iint |u|^2 d\Omega_\zeta d\Omega_\zeta < +\infty$ ナラバ

$$(4.7)\quad \lim_{r\to 1}\iint_{|\zeta|=|\nu|=1} |u(r\zeta\ \ r\nu) - u(\zeta\ \ \nu)|^2 d\Omega_\zeta d\Omega_\nu = 0$$

が成立スル. 証明ハ一変数ノ場合ト全ク同ジデアルカラ省略スルコトニシヨウ.[11]

(4.7) カラ $u(z, w)$ が $|z|<1,\ |w|=1$ デ $\equiv 0$ ナラバ $u(\zeta\ \nu)$ ハHデ殆ンド到ル所ニ0デアルコトが分ル. 一方Aハ invariant デアルカラ, $u(\zeta, \nu)$ ノ所ヘ A ノ charakteristische Funktion ヲ置イテ見レバ明ラカナル如ク, 定理14ヲ証明スルタメニハ次ノ定理15が成立ツコトヲ示セバヨイ:

定理**15.** $u(\eta_1, \eta_2)$ ハ有界, 可測, $\geqq 0$. $\sigma(\mathfrak{G}) <+\infty$ ナルレーツノ超 Fuchs 群ノスベテノ変換デ不変デア

11) 定理7及ビ10参照.

ルトスル. コノトキ $u(\eta_1\ \eta_2)$ ガ0トナル部分集合ノ τ ー測度ガ >0 ナラバ

$$u(z\ w)=\iint_{|\zeta|=|\nu|=1} P(z\ \zeta)P(w\ \nu)u(\zeta\ \nu)\,d\Omega_\zeta\, d\Omega_\nu\equiv 0$$

デアル。

コノ定理ハ $n=1$ ノ場合ト全ク同ジ順序ニ從ッテ証明セラレル。[12] 先ヅ準備トシテ

定理16. $u(\zeta)\geqq 0$, $\int_{|\zeta|=1} u(\zeta)\,d\Omega_\zeta<+\infty$ ナルトキ Poisson 積分:

$$u(z)=\int_{|\zeta|=1} P(z\ \zeta)u(\zeta)\,d\Omega_\zeta$$ ハ "Harnack ノ不等式":

$$u(z)e^{-2nS(z,\,z')}\leqq u(z')\leqq u(z)\,e^{2nS(z,\,z')}$$

ヲ満足スル.

証明. $S(z,\ z')$ ハ運動デ変ラナイカラ $z=0$ 又ハ $z'=0$ ナル場合ヲ証明スレバヨイ. (2, 3) カラ明カナル如ク

$$\max_\zeta P(z\ \zeta)=\frac{1}{\Omega}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n=\frac{1}{\Omega}e^{2nS(0,\,z)}$$

デアル. 故ニ

$$u(z)\leqq e^{2nS(0,\,z)}\frac{1}{\Omega}\int u(\zeta)\,d\Omega_\zeta=u(0)\cdot e^{2nS(0,z)}$$

---

12) E. Hopf: Ergodentheorie, 73—81 参照. 以下述ベル証明ハ Hopf ノ証明ノ全ク直接ナル一般化デアル。

コレ即チ $z=0$ 又ハ $z'=0$ ナル場合ノHarnackノ不等式ニ他ナラナイ。

Lemma 1. $\mathfrak{A}$ノ部分集合Bガ

充分大キナ l ニ對シテハ

$$\frac{\sigma(B.K(l))}{\sigma(K(l))} < a\cdot\sigma(BR) \qquad (a\text{ハ常數})$$

ガ成立スル．但シコノ R ハ超フックス群ノFundamentalbereichヲ現ハス。

コノLemmaヲ證明スルタメニハ $\sigma(K(l))$ ノ"大キサ"ヲ知ル必要ガアル。簡單ノタメ $\sigma(K(l))=\sigma(l)$ ト書クコトヽシ，(2.4)ト(2.6)カラコレヲ計算スレバ

$$(4.8)\qquad \sigma(l)=\sigma(K(l))=\int_0^l \omega(l)\,dl=\frac{\Omega}{2n}(\sinh l)^{2n}$$

ヲ得ル．——— コノ(4.8)ヲ用ヒテ，Lemma 1ハ $n=1$ ノ場合ト全ク同樣ニ證明セラレル．スナハチ $K(l)$ 内ニアル z ト合同ナ点ノ數ヲ $N(z,l)$ トスレバ，一ツノ常數 b ガアッテ

$$N(z,l)<\frac{\sigma(l+b)}{\sigma(b)}$$

トナル．然ルニ(4.8)カラ $\sigma(l+b)<const\times\sigma(l)$ ガ成立スルカラ

$$N(z,l)<a\cdot\sigma(l)$$

一方 $\int_{RB} N(z,l)\,d\sigma_z$ ハ $\sigma(BK(l))$ ニ等シイ．コレヨリ直チ

ニ Lemma 1 ガ成立ツコトガ分ル。[3]

Lemma 2. $\sigma(\mathfrak{F}) < +\infty$ トスル. $u(\zeta)$ ハ $|\zeta|=1$ デ有界, 可測, $\geqq 0$, 且ツ超 Fuchs 群ノスベテノ変換デ変ラナイトスル. コノトキ $u(\zeta)=0$ トナル ζ ノ集合ガ positiv ナ Euklid 測度ヲモツナラバ

$$u(z)=\int_{|\zeta|=1} P(z,\zeta)\,u(\zeta)\,d\Omega_\zeta \equiv 0$$

デアル。

証明. 定理7カラ明カナル如ク $u(z)$ ハ超 Fuchs 群ニ属スル運動ニヨッテ変ラナイ。従ッテ, 特ニ超 Fuchs ノ Fundamentalbereich R ノ Rand ガ全ク Ω ノ内部ニ含マレル場合ニハ, $u(z)$ ハ Ω ノ内部デ Maximum ニ達スルコトニナルカラ, Konstant デナケレバナラヌ. 故ニ定理10ニヨッテ $u(\zeta)$ モ Konstant, シカモ $\equiv 0$ トナル. 故ニ $u(z)\equiv 0$ デナケレバナラヌ。

R ガ $|z|=1$ ノ上ニ Randpunkt ヲ有スル場合ニハ

$$h_2(t)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^2 & (0\leqq t<\varepsilon)\\ 0 & (t\geqq\varepsilon)\end{cases}$$

ヲ考ヘル. 一般ニ Ω ガ $m(\Omega)<+\infty$ ナル Maß m ノ定義サレタ空間, $h(t)$ ガ有界且ツ一様連続ナルトキ, 任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ $\delta_\varepsilon>0$ ヲ選ンデ, Ω ノ上ノ quadrat-

(3) 詳シクハ E. Hopf: Ergodentheorie, 73–76 頁参照。

summierbar ナ函数 $u(P)$, $v(P)$ ニツイテ

$$\int |u(P)-v(P)|^2 dm_P < \delta_\varepsilon \quad \text{ナラバ}$$

$$\int |h(u(P))-h(v(P))| dm_P < \varepsilon$$

ナラシメルコトガ出来ル.[14] 従ッテ定理10カラ

$$\lim_{r\to 1}\int |h_\varepsilon(u(r\zeta))-h_\varepsilon(u(\zeta))| d\,\Omega_\zeta = 0$$

故ニ

$$\lim_{r\to 1}\int h_\varepsilon(u(r\zeta)) d\Omega_\zeta = \int h_\varepsilon(u(\zeta)) d\Omega_\zeta$$

デアル. 然ルニ, (2.4) ト (2.6) カラ $dw=(\sinh l)^{2n-1}$ $\cosh l\, d\Omega$ デアルカラ

$$\frac{1}{\sigma(l)}\int_{K(l)} h_\varepsilon(u(z)) d\sigma_z$$

$$= \frac{1}{\sigma(l)}\int_0^l (\sinh l)^{2n-1} d\sinh l \int_{|\zeta|=1} h_\varepsilon(u(r\zeta)) d\Omega_\zeta$$

トナル. 故ニ

$$(4.9)\quad \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\sigma(l)}\int_{K(l)} h_\varepsilon(u(z)) d\sigma_z = \frac{1}{\Omega}\int_{|\zeta|=1} h_\varepsilon(u(r\zeta)) d\Omega_\zeta$$

---

14) 何トナレバ仮定ニヨッテ $\varepsilon_1>0$ ニ對シテ $|u-v|<\delta_1$ ナラバ $|h(u)-h(v)|<\varepsilon_1$ ナル δ_1 ガ存在スル. コノトキ $m(P;|u(P)-v(P)|\geqq\delta_1)<\frac{\delta_\varepsilon}{\delta_1^2}$ デアル. 故ニ

$$\int |h(u(P))-h(v(P))| dm_P$$

$$=\int_{|u-v|<\delta_1}+\int_{|u-v|\geqq\delta_1} < \varepsilon_1 m(\Omega)+\frac{\delta_\varepsilon}{\delta_1^2}\cdot 2\sup|h|$$

今コヽデ $B_\varepsilon=(z;\ u(z)\leqq\varepsilon)$ トオケバ B_ε ハ明ラカニ超 Fuchs群デ不変デアッテ $\sigma(B_\varepsilon K(l))/\sigma(l)$ ハ (4.9) ノ左辺ヨリ大キイ. 故ニ Lemma 1 ニヨッテ

$$\operatorname{map}(\zeta;\ u(\zeta)=0)$$

$$\leqq\int h_\varepsilon(u(\zeta))\,d\Omega_\zeta < a\Omega\cdot\sigma(B_\varepsilon R)$$

假定ニヨッテ $\sigma(R)<+\infty$ デアルカラ, コレヨリ $\sigma(\prod_\varepsilon B_\varepsilon R)>0$ ナルコトガ分ル. スナハチ $u(z)$ ハ Ω ノ内部デ 0 トナル. 故ニ $u(z)\equiv 0$ デナケレバナラヌ。

Hauptlemma. $u(\eta_1,\eta_2)$ ガ定理 15 ノスベテノ假定ヲ満足スルナラバ, $u(0,\gamma)=\dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_{|\zeta|=1}u(\zeta\,\nu)\,d\Omega_\zeta$ ヲ 0 ナラシメル $|\gamma|=1$ ノ上ノ ν ノ集合ノ Euklid 的測度ハ >0 デアル。

証明. 初メニ Fundamentalbereich R ガ全ク Ω ノ内部ニ含マレル場合ヲ考ヘル. 超 Fuchs 群ノ Element ヲ $S_0=1,\ S_1,\ S_2,\cdots\cdots,\ S_\nu,\cdots\cdots$ トシ $R_\nu=S_\nu^{-1}(R)$ (從ッテ $R_0=R$) トオク. R_ν ハスベテ同ジ N. E.-Durchmesser D $(<+\infty)$ ヲモツ。

サテ吾々ハ $n=1$ ノ場合ニ倣ッテ

$$M_\varepsilon(l)=\frac{1}{\sigma^2(l)}\iint_{K(l)K(l)}h_\varepsilon(u(z,w))\,d\sigma_z\,d\sigma_w \tag{4.10}$$

ノ評價ヲ試ミヨウ. R_ν ノ直径ハ D デアルカラ $K(l-D)$ ハ $K(l)$ ニ含マレル R_ν デ全ク蔽ハレル。故ニ

$$M_\varepsilon(l-D) \leqq g(l)\frac{1}{\sigma^2(l)}\sum_\nu\sum_\mu \iint_{R_\nu R_\mu} h_\varepsilon(u(z,w))\,d\sigma_z\,d\sigma_w;$$

但シコヽデ

$$g(l)=\left[\frac{\sigma(l)}{\sigma(l-D)}\right]^2$$

トシ，$\sum_\nu\sum_\mu$ ハ $K(l)$ ニ含マレルスベテノ R_ν, R_μ ニツイテトルモノトスル．今コヽデ

$$u(\zeta\ \ w)=\int P(w\ \ \nu)\,u(\zeta\ \ \nu)\,d\Omega_\nu$$

トオケバ，コノ積分ハ殆ンドスベテノ ζ ニ對シ收斂シテ

$$u(z\ \ w)=\int P(z\ \ \zeta)\,u(\zeta\ \ w)\,d\Omega_\zeta$$

ト表ハサレル．從ッテ w ヲ一定トシテオケバ $u(z\ \ w)$ ニ對シテ z ノ函數トシテ Harnack ノ不等式ガ適用セラレル．$z\in R_\nu$ トスルト $S_\nu(z)\in R$ デアルカラ，$S(0,S_\nu(z))\leqq D$ トナル．故ニ

$$u(z,w)=u(S_\nu(z),S_\nu(w))\geqq e^{-2\pi D}u(0,S_\nu(w))$$

從ッテ h_ε ハ單調デアルカラ

$$h_\varepsilon(u(z,w))\leqq h_\varepsilon\{e^{-2\pi D}u(0,S_\nu(w))\},\qquad (z\in R_\nu)$$

ヲ得ル．コヽデ $v(w)$ ヲ次ノ如ク定義スル：

$$v(w)=\int_{|\nu|=1} P(w\ \ \nu)\,h_\varepsilon\{e^{-2\pi D}u(0,\nu)\}\,d\Omega_\nu$$

然ルニ $h_\varepsilon(t)$ ハ konkav デアルカラ一般ニ

$$h_\varepsilon\left(\int u(p)\,dm_p\right) \leqq \int h_\varepsilon(u(p))\,dm_p$$

ガ成立スル.[15] 故ニ

$$e^{-2\pi D} u(0, w) = \int_{v \in \Gamma} P(w, v)\, e^{-2\pi D} u(0, v)\, d\mathfrak{S}_v$$

ト $v(w)$ ノ定義カラ

$$h_\varepsilon(e^{-2\pi D} u(0, w)) \leqq v(w)$$

ナルコトガ分ル. 従ッテ

$$h_\varepsilon(u(z, w)) \leqq v(S_\nu(w)), \qquad z \in R_\nu$$

コノ式カラ

$$M_\varepsilon(l - D) \leqq \frac{g(l)}{\sigma^2(l)} \sum_\nu \sum_\mu \iint_{R_\nu R_\mu} v(S_\nu(w))\, d\sigma_z\, d\sigma_w$$

$$\leqq \frac{g(l)}{\sigma(l)} \sum_\nu \int_{R_\nu} \left\{ \frac{1}{\sigma(l)} \int_{K(l)} v(S_\nu(w))\, d\sigma_w \right\} d\sigma_z$$

ヲ得ル. 然ルニ $v(S_\nu(w))$ ハ N. E.-*harmonisch* デアルカラ, 平均値ノ定理ニヨッテ

コノ式ハ

$$M_\varepsilon(l - D) \leqq \frac{g(l)}{\sigma(l)} \sum_\nu \sigma(R_\nu)\, v(S_\nu(0))$$

---

15) $h_\varepsilon(u(z, w))$ ハ言ハバ "*subharmonisch*" デアル. コノ様ナ意味デ *subharmonische Funktion* ノ一般論ヲ考ヘルコトガ出来ルガ, 吾々ノ不等式ハ

$$h_\varepsilon\left(\sum m_j u_j\right) \leqq \sum m_j h_\varepsilon(u_j)$$

ノ直接ナル一般化ニスギナイ。

$$=\frac{g(l)}{\sigma(l)}\sigma(R)\sum_{\nu} v(S_\nu(0))$$

トナル. $s(0,\ S_\nu(0)) = s(S_\nu^{-1}(0),\ 0) \leqq l$ デアルカラ $S_\nu(R)$ ハ $K(l+D)$ ニ含マレル。

$$M_\varepsilon(l-D) \leqq \frac{g(l)}{\sigma(l)}\sum_{\nu}\int_{S_\nu(R)} v(S_\nu(0))\,d\sigma_z$$

然ルニ, $v(z)$ ニ Harnack ノ不等式ヲ適用スレバ

$$v(S_\nu(0)) \leqq e^{2nD} v(z), \qquad z \in S_\nu(R)$$

ヲ得ル. 故ニ

$$M_\varepsilon(l-D) \leqq \frac{g(l)}{\sigma(l)} e^{D}\sum_{\nu}\int_{S_\nu(R)} v(z)\,d\sigma_z$$

$$\leqq \frac{g(l)}{\sigma(l)} e^{D}\int_{K(l+D)} v(z)\,d\sigma_z = e^{D} g(l)\frac{\sigma(l+D)}{\sigma(l)} v(0)$$

コヽデ $l\to\infty$ ノ極限ヲ考ヘレバ

$$\lim_{l\to\infty} M_\varepsilon(l) \leqq c\cdot v(0), \qquad c = c(D)$$

ナルコトガ分ル。

(4.7) カラ, (4.9) ト同様ニシテ

$$\lim_{l\to\infty} M_\varepsilon(l) = \frac{1}{\Omega^2}\iint_{|\zeta|=|\nu|=1} h_\varepsilon(u(\zeta,\nu))\,d\Omega_\zeta\, d\Omega_\nu$$

ヲ得ルガ, コノ右辺ハ明カニ $u(\zeta,\nu)=0$ ナラシメル (ζ,ν) ノ集合ノ τ－測度ヨリ大キイ. 一方

$$v(0) = \frac{1}{\Omega}\int_{|\nu|=1} h_\varepsilon\{e^{-2nD}u(0,\nu)\}\,d\Omega_\nu$$

ハ $u(0,\gamma)\leqq\varepsilon$ ナル γ ノ集合ノ測度 $\dfrac{1}{\delta}$ ヲ越エナイ．故ニ上ノ結果カラ

$$Map\left(\gamma;u(0,\gamma)\leqq\varepsilon\right)\geqq\frac{\delta}{c}\tau\left((\zeta,\gamma);u(\zeta,\gamma)=0\right)$$

コンデ $\varepsilon\to 0$ トスレバ

$$Map\left(\gamma;u(0,\gamma)=0\right)>0$$

ナルコトガ分ル．

以上ニ於テハ R ガ全ク $\mathfrak{R}$ ノ内部ニ含マレルト假定シタ．R ガ $|z|=1$ ノ上ニ Randpunkt ヲ有スル一般ノ場合ハ $n=1$ ノトキト全ク同ジ技巧ニヨッテ，始メノ場合ニ帰着セシメラレル――．

定理15ノ証明．始メニ $E_z=(\gamma;u(z,\gamma)=0)$ ガ（測度0ヲ除ケバ）z ニ関係シナイコトヲ示サウ．定理10デ示シタ如ク

$$\lim_{r\to1}\int_{|\gamma|=1}|u(z,r\gamma)-u(z,\gamma)|^2d\Omega_\gamma=0$$

ナル故，コノ積分ノ範囲ヲ E_z ニ限レバ

$$\lim_{r\to1}\int_{E_z}|u(z,r\gamma)|^2d\Omega_\gamma=0$$

ヲ得ル．然ルニ Harnack ノ不等式ニヨレバ，$z'(|z'|<1)$ ヲ任意ニ選ンダトキ

$$u(z',w)\leqq e^{2nS(z',z)}u(z,w)$$

デアル．故ニ

$$\lim_{\gamma \to 1} \int_{E_z} |u(z', r\gamma)|^2 d\Omega_\gamma = 0$$

從ッテ再ビ定理10ニヨッテ

$$\int_{E_z} |u(z', \gamma)|^2 d\Omega_\gamma = 0$$

スナハチ $Maß(E_z - E_{z'}) = 0$ デアル。z ト z' ヲ入レ換ヘレバ、コレヨリ直チニ $E_z = E_{z'}$ ナルコトガ分ル。ソコデ $E_z = E$ トオクコトニスル。Hauptlemma ニヨレバ E ハ >0 ナル Maß ヲモツ。

一方 $u(z, \gamma)$ ハ超 Fuchs 群ニ對スル不變性カラ

$$u(z, \gamma) = u(S(z) \quad S(\gamma))$$

ヲ滿足スル。故ニ

$$S(E_z) = E_{S(z)} = E$$

スナハチ E ハ超 Fuchs 群ノ變換デ不變デアル。從ッテ E ノ charakteristische Funktion ヲ $e_E(\gamma)$ トスレバ、Lemma 2 ニヨッテ $1 - e_E(\gamma) = 0$ デナケレバナラヌコトガ分ル。故ニ $u(z, \gamma) \equiv 0$。從ッテ $u(z, w) \equiv 0$ デアル。

—— コレデ Ergoden theorie ノ證明ヲ終ル。

コヽニ至ッテ以上ノ證明ヲ顧リミルトキ、吾々ハ空間 $\mathfrak{R}$ トソノ運動群ノ眞ニ具体的ナ形ヲ少シモ利用シナカッタコトニ氣ガ付ク。上記ノ證明ハ從ッテ形式的ニハモット抽象化セラレ得ルデアラウ。

一般ニ Fuchs 群ノ場合ニハ Poincaré 空間 $\mathfrak{R}$ ハ

吾々ノ場合ト根本的ニ異ナル構造ヲモツ．吾々ノ空間 $\mathfrak{R}$ ハ homogenuous ナルノミナラズ"等方性"ヲ有スル．スナハチ $\mathfrak{R}$ ノ N.E.－球面ハソノ中心ヲ動カサナイ運動ニ関シテ transitiv デアッタノデアル．一般ノ Poincaré 空間デハコレガ成立シナイ．空間ノ S ハ一般ノ Poincaré 空間デハ恐ラク成立シナイノデハナイカト思ヘレル。