1029. 束群ニ関スル一注意

岩澤 健吉（東大）

コノ間ノ誌上談話會ニ出マシタ中山サンノ束群ニ関スル談話[1]ハ大変興味深ク拝見シマシタ。ソノ中デ Lorenzen ノ理論ヲ用ヒテ Birkhoff ノ豫想ノアル場合ヲ解イテ居ラレマスガ，ソノ結果ダケヲ目標ニスルナラバ直接計算ニヨッテモ比較的簡単ニ出セルヤウニ思ヒマスノデ以下ソレニ関シテ少シ述ベテ見マス。

然シ Birkhoff ノ豫想ヲ一般ニ解カウトスレバ矢張リ Lorenzen 式ニ何カ linear ナモノニ依ル表現ヲ用ヒルノガ一番良イノデセウ。

先ヅ任意ノ束群 $\mathfrak{G}$ ニ関シテ一，二ノ注意ヲ述ベマス。

補助定理1. $\mathfrak{G}$ ニ於テ $a \wedge b = 1$ 又ハ $a \vee b = 1$ ナラバ a ト b トハ交換可能デアル。

証明.
$$a^{-1}(a \wedge b)b^{-1} = b^{-1} \vee a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$
$$b^{-1}(a \wedge b)a^{-1} = b^{-1} \vee a^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

ヨッテ $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

即チ $ab = ba$ （証終）

補助定理2. $\mathfrak{G}$ ニ於テ z ガ $\mathfrak{G}$ ノ核心（Zentrum）ニ属スルタメニ必要且十分ナル條件ハ z ガ $z \leq x$ ナルスベテノ x ト交換可能ナルコトデアル。

---

(1) 全國紙上數學談話會 221号 談話 983—984.

証明　先ヅ $y \leqq z$ トスレバ $z^{-1} \leqq y^{-1}$

$$\therefore \quad z \leqq y^{-1} z^2$$

假定ニヨリ z ト $y^{-1}z^2$ トハ交換可能デアルカラ z ト y モ交換可能トナル。次ニ a ガ任意ニ與ヘラレタトスレバ

$$z(a \frown z) = (a \frown z) z,$$

$$z(a \smile z) = (a \smile z) z.$$

$$\therefore \quad za \frown z^2 = az \frown z^2, \quad za \smile z^2 = az \smile z^2$$

$\mathfrak{G}$ ガ distributive デアルコトヲ用ヒレバ，コレカラ $az = za$.　　　（証終）

次ニ $\mathfrak{G}$ ハ conditionally complete ト假定シマス．$1 < a$ デ且ツ $1 \leqq x \leqq a$ ナル x ガ存在シナイ様ナ要素 a ヲカリニ C－要素トヨブコトニシマス。然ラバ

定理 1.　$\mathfrak{G}$ ガ conditionally complete ノラバ C－要素 a ハ $\mathfrak{G}$ ノ核心ニ属ス。

証明　補助定理 2 ニヨリ a ガ $a \leqq x$ ナル任意ノ x ト交換可能ナルコトヲ証明スレバヨイ。

$a \leqq y \leqq x$ ナル y デ a ト交換可能ナモノノ全体ヲ $\mathfrak{M}$ トシ $\mathfrak{M}$ ノ l.u.b. ヲ z トシマス．明カニ $za = az$ ナル故 z ハ $\mathfrak{M}$ ニ属シ，從ツテソノ最大要素デアリマス。$z' = z^{-1}x$ トオケバ $z' \geqq 1$ デ a ハ C－要素ナル故

$a \frown z' = 1$ 又ハ $a \frown z' = a$.

後者ノ場合ニハ $a \leqq z'$. 從ツテ $za \leqq x$. za ハ a ト交換可能デ z ヨリ大トナリマスカラ之レハ不合理.

故ニ $a \frown z' = 1$. 従ッテ補助定理1ニヨリ a ト z' トハ交換可能. 故ニ a ト x トモ交換可能(従ッテ実ハ $z' = 1$ デアッタ). (証終)

補助定理3. $\mathfrak{g}$ ガ weakly maximally complete ナラバ, $\mathfrak{g}$ ハソノ c-要素ニヨリ生成サレル。

証明. c-要素カラ生成サレタ $\mathfrak{g}$ ノ部分群ヲ $\mathfrak{g}_1$ トシマス。

$1 \leqq x$ ナル x ヲトル. $1 \leqq y \leqq x$ ナル y デ $\mathfrak{g}_1$ ニ属スルモノヽ全体ヲ $\mathfrak{M}_1$ トシ $\mathfrak{M}_1$ ノ一ツノ極大要素ヲ y_0 トスル。$y_0 \neq x$ トセヨ, $y_0 < z \leqq x$ ナル z ノ集合ヲ $\mathfrak{M}_2$ トシ, $\mathfrak{M}_2$ ノ極小要素ノ一ツヲ z_0 トスレバ $y_0^{-1} z_0$ ハ c-要素トナリマス。

従ッテ z_0 モ $\mathfrak{g}_1$ ニ属スルコトヽナリ, 之ハ不合理. 故ニ $y_0 = x$ デ x ハ $\mathfrak{g}_1$ ニ属スル. 一般ニ $w = (1 \smile w)(w^{-1}(1 \smile w))^{-1}$, $1 \smile w \geqq 1$, $w^{-1}(1 \smile w) \geqq 1$ ナル故任意ノ w ガ $\mathfrak{g}_1$ ニ属スル. 即チ $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ (証終)

コノ補助定理ト定理1カラ直チニ目的ノ定理ガ得ラレマス。

定理2. weakly maximally complete ナ束群ハ abel 群デアル。

(終)