

1028.  $\zeta(x), \Gamma(x)$  = 関スル函数方程式 =  
就イテ

春 木 博 (神高商船)

りーまんノ  $\zeta$  函数ノ 函数等式トシテ有名ナル次ノ式ガアル。

$$\zeta(1-x) = 2(2\pi)^{-x} \cos \frac{\pi x}{2} \Gamma(x) \zeta(x)$$

今逆ニ  $f(x)$  ガ有限平面ニ於テ  $x=1$  = 於テ一位ノ極ヲモツ  
外、正則ナリトスルトキ

$$(1) f(1-x) = 2(2\pi)^{-x} \cos \frac{\pi x}{2} \Gamma(x) f(x)$$

ヲ充テ  $f(x)$  ハ如何ナル函数カ?

$$\text{先ツ } f(x) = \frac{C}{1-x} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (1-x)^n \text{ トスルトキ (1) =}$$

於テ  $x \rightarrow 0$  トスルコトニヨリ、容易ニ  $f(0) = \frac{C}{2}$  ナルコト  
ガ判ル。

又  $\varphi(x)$  ヲ  $\varphi(1-x) = \varphi(x)$  ヲ充テ整函数トスルトキ  
 $f(x) = \varphi(x) \zeta(x)$  ト書ケルコトニ容易ニ判ル。例ヘハ  
 $\Delta \sin \pi x \zeta(x)$  ノ如キハ (1) ノ解デアアル。

シカラバ、次ニ  $f(x) = \text{如何ナル条件ヲ與ヘタラ } f(x) =$   
 $\zeta(x)$  トナルカ。之ハ仲々ムツカシイ問題デアアル。  $\Gamma$  函数ノ  
函数方程式

$$f(x+1) = x f(x)$$

ニツイテハ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+n)}{(n-1)! n^x} = 1 \text{ ならば } f(x) = \Gamma(x) \text{ となり, 又}$$

$f(1) = 1$ ,  $f(x)$  が對數的凸函数ならば  $f(x) = \Gamma(x)$  となる (Artin) と云フコトが知らレテキル。(1) = 對シテモコノヤウナ條件が望マシイ。

又,  $\Gamma$  函数ノ函数方程式

$$(2) \quad f(x)f(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

= ヲイテモ、上記ノヤウナ問題が考ヘラレル。  $f(x) = e^{j(-\frac{1}{2}+x)} \rho(x)$  等ニ (2) ノ解デアル。更ニ又、(1) = 於テ  $x$  ノ代リ =  $1-x$  トスルコト = コリ (2) ノ  $\Gamma$  函数ノ函数方程式が得ラレルコト = 氣が付ケバ、 $f(x)$  ハ有限平面ニ於テ  $x=1$  ノ一極トシテ持ッ外正則  $g(x)$  ハ  $x=0$  ノ一極トシテ持ッ外正則トスルトキ、函数方程式

$$f(1-x) = 2(2\pi)^{-x} \cos \frac{\pi x}{2} g(x) f(x)$$

ヲ充ス函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  = 如何ナル條件ヲ映ヘレバ  $\zeta(x)$ ,  $\Gamma(x)$  トナルカ? 1 如キ一般的問題ニ生ズル。

(完)