1026. 擴張セラレタ Cauchy's integral formula ノ検討

高須鶴三郎（東北大）

1°. $f(z)$,（$z=x+iy$, $j^2=\mu+\nu j$; x, y, μ, ν ハ実数）ノ理論ハ絶對値ト modulus トヲ区別スルコトニヨリ, Cauchy's integral formula 及ビ其ノ結果以外ハ安全ニ進行シ, Cauchy's integral formula モ $\nu^2+4\mu<0$ ノ場合ハ問題ナク, 従ッテ全複素函数論が拡張セラレマスが, 円ノ代リニ楕円が来ル程度ノ拡張デスカラ, 却ッテ張合が少イデスが, $\nu^2+4\mu\to 0$ 及ビ >0 ノ場合ハ, Cauchy's integral formula ノ成立ト,「一度微分出来レバ何回デモ出来ルトハ限ラナイ」コトトノ矛盾ニ苦シミマシタが, 漸ク事柄が透明ニナリマシタカラ, 以下其ノ検討ヲサセテ頂キマス。

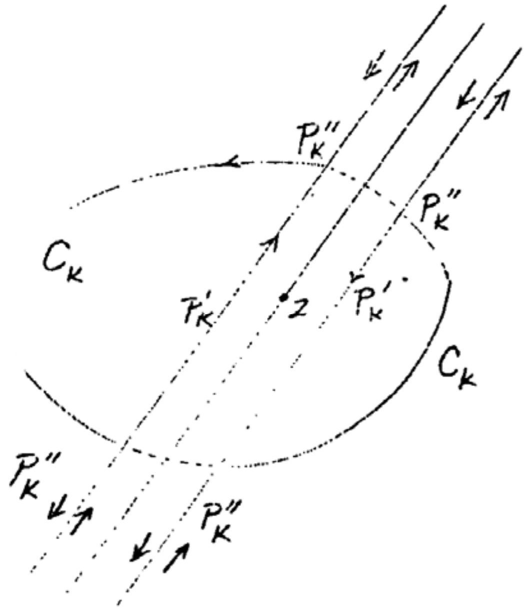
2°. Algebraic ニ（即チ hyperbolic geometry デ共軛点對向ノ距離が $\frac{\pi}{2}K$ デアルコトノ, reality ヲコメテノ完全 dual ノ量ヲ4倍シテ）知レテ居ル所ノ「一周角が所属 trigonometry デ $2\pi\frac{i}{j}$ デアル」コトヲ, 所属 polar coordinates (ρ, θ),（$\rho=(x^2+\nu xy-\mu y^2)^{\frac{1}{2}}$, $z=\rho e^{j\theta}$）デ

$$(1)\qquad \oint d\theta = 2\pi\frac{i}{j}$$

ト書イテモ analysis ト抵触シナイコトハ一月末号デ見

テオキマシタ通リデアリマス。

2°. 次ニ $\nu^2+4\mu>0$ 及ビ $\to 0$ ノ場合ニ對スル新シイ integral formula (3) ヲ導イテ見マス. 点 $z=x+jy$ ヲ囲ム閉曲線 C ノ, 平行 isotropes $(X-x)+j(Y-y)=\pm K$, $(K>0)$ ヲ P_K ト名ヅケ, C ノ内ニアル P_K ノ部分ヲ P_K', 外ニアル部分ヲ P_K'' ト名ヅケテオキマスト, C_K ト P_K' トデ囲マレタ部分ニハ Nullteiler ハアリマセンカラ, Cauchy's integral theorem (此方ニハ不安ハアリマセン) ハ成立シマス. 積分ノ道ニハ図ノ様ノ向キヲ辿リマス. 即チ



$$\int_{C_K-P_K}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0$$

$$(2)\quad \int_{C_K}=\int_{P_K}$$

然ルニ isotropes ニ平行ナ

$P_K=P_K'+P_K''$ ニソウテハ $d\zeta=0$ デスカラ

$$\int_{P_K'}=0 \quad \text{從ッテ} \quad \lim_{K\to 0}\int_{C_K}=0$$

仍テ次ノ新シイ integral formula ヲ得マス。

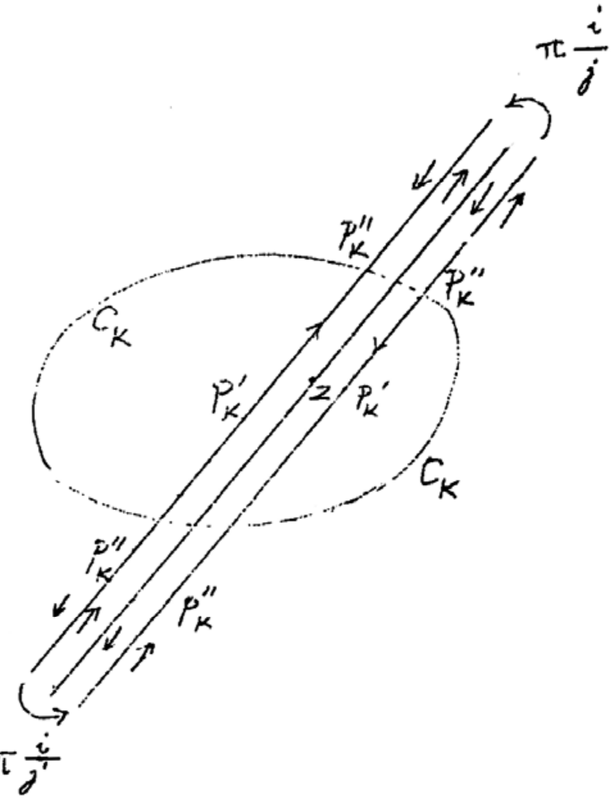
$$(3)\quad \int_{\lim\limits_{K\to 0} C_K}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0$$

之レハ Cauchy's integral formula ノ一ツノ ausarten シタ Gegenstück ト見ルベキデアリマ

ス、此ノ際 $(X-x)+j(Y-y)=0$ が isotrope デ
ナケレバ、$\lim_{\kappa\to 0} C_\kappa$ ノ代リニ C ト書イテコイデセウが、
今ハ C ト書ケマセヌ。

3°. (2) ノ積分ノ

双方カラ



$$(4)\quad \int_{C_\kappa}+\int_{P''_\kappa}$$

$$=\int_{P'_\kappa}+\int_{P''_\kappa}=\int_{P_\kappa}$$

P'_κ, P''_κ 上カラノ積分

ノ寄與ハ 0 デスが、

$\log(\zeta-z)$ ノ $\zeta-z$

が正負号ヲ変ズル所二ヶ所（圖ノ ⌒ 及ビ ⌣ 印ノ所）デノ

$\int\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ ノ中ノ $\zeta-z=\rho e^{j\theta}$, $\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{d\rho}{\rho}+j\,d\theta$ ノ

$\theta=\pi\frac{i}{j}$ 宛ノ寄與ヲ考ヘルト、(4) カラ

$$(5)\quad \lim_{\kappa\to 0}\int_{C_\kappa+P''_\kappa}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i f(z)$$

が得ラレマス。之が Cauchy's integral formula ノ第二ノ Analogon デス。其ノ際 bicomplex $\zeta=x+jy+jiz+iu$, $(i^2=-1)$ ノ domain ヲ R_4 ノ xy-plane $(z=0,\ u=0)$ ニ限リ、

$$f(\zeta)=X(x,y,0,0)+jY(x,y,0,0)$$
$$+jiZ(x,y,0,0)+iU(x,y,0,0)$$

ノ domain トシテ二次元ヨリ上ノモノヲ考ヘタコトニナリマシタカラ，i ガ這入ッテ来マシタ、然シ(3)ガアルコト故(5)ハ実質ハ

$$\lim_{K\to 0}\int_{P'_K} = \lim_{K\to 0}\int_{P''_K}$$

即チ　$2\pi i f(z) = 2\pi i f(z)$

ナル trivial ナ結果ニ ausarten シタワケデス。

<u>N. B.</u> 学士記事ノ方ハ正誤表デ正シテオキマシタ．2°，3° ノ項デ述ベマシタコトハ conjugate hyperbolas ヲ（$\nu^2+4\mu>0$ ノ場合ニ）用フル方法デモ示サレマス。

4°　$\nu^2+4\mu>0$ ノ場合ニ，一度ハ微分出来ルガ二度ハ出来ヌ例ハ次ノ様ニ作レマス．$\varphi(\eta)$ ヲ連続ナレドモ微分可能デナイ実変数函数トシマスト，$\Phi(\eta)=\int\varphi(\eta)d\eta$ ハ一度ダケシカ微分出来ナイ函数デアリマス、之レヲ利用シテ，

$$f(z)=\{-(\mu r+\mu\nu+\nu^2 r)+(\mu+r\nu)j+\nu r\bar{j}\}\Phi(x-ry)$$

ヲ作ルト，之ハ一度ダケ微分出来テ二度以上微分出来ナイ函数デアリマス、茲ニ $\nu=j+\bar{j}$，且ツ r ハ $r^2=\mu+\nu r$ ノ一根ダトシマス，何トナレバ，$z=x+jy$，$\bar{z}=x+\bar{j}y$ カラ

$$\eta=x-ry=\frac{(-\bar{j}-r)z+(j+r)\bar{z}}{j-\bar{j}}$$

トナリ，

$$f'(z)=\{-(\mu\gamma+\mu\nu+\nu^2\gamma)+(\mu+\gamma\nu)j+\nu\gamma\bar{j}\}\,\varphi(\eta)\,\frac{-j-\gamma}{j-\bar{j}}$$

而シテ $f'(z)$ ノ存在ノ必要條件 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ ガ容易ニ示サレルカラデアリマス.（$\mu=1,\ \nu=0,\ \gamma=1$ ノ場合ヲ窪田教授ガ示サレマシタ）

此ノ paradox ハ前掲ノコトデ解決ガツイタ訳デアリマス。

Beltrami-Pompéiu ノ積分公式モ上掲ノ場合ニ準ジテ形ガ ausarten シテ来マス。

4°. Cauchy's integral formula ニアラハレル i ガコノ中ニアル i トハ独立行動ヲトルコトハ，$\nu^2+4\mu<0$ ノ場合ニ成立確実ナル $Z=x+jy$ ノ時ノ formula カラ依然トシテ云ヘマス。

終リニ，discussion ヲシテ下サッタ数氏ニ厚ク御礼ヲ申シマス。

尚、組織的ノ結果ハ相當豊富デハアリマスガ本発表ハ慎重ヲ期シタイト思ヒマス。