1024. Symmetric group 及ビ full linear group ノ character ニツイテ

小暮　勝美（東大）

談話993，994ト関聯シテ、對稱群 Π_f ト full linear group $GL(n)$ ノ character ニツイテ，ヨク知ラレタ結果ヲ導キ出ス一ツノ方法ヲ述ベタイト思ヒマス。

コノ談話ハ順序トシテハ上ノ二ツノ談話ノ中間ニ位置スルモノデ，話ノ準備トシテハ談話994ノ§2ヲ以テ代ヘマス（ソノ中ノ character ニ関スル部分ハ除外シテ）．但シソコニハ間違ガアリマシタカラ訂正シマス。第677頁中段デ F_S トカイタノハ SF トカクコトヽシテ，次頁6行目ノ $P_f e$ ハ $\hat{e}P_f$ ト訂正致シマス．従ッテ以下ノ§2及ビ§4ニ現ハレル $P_f e$, $P_f b$, $P_f ba$, $(P_f c)^*$ ハ夫々 $\hat{e}P_f$, $\hat{b}P_f = bP_f$, $\widehat{ba}P_f = abP_f$, $(\hat{c}P_f)^*$ ト訂正シマス。

（尚ツイデナガラ、申シ添ヘマスガ談話993デハ、どいつ文字ノ $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ トらてん文字ノ m, n トガ印刷ノ上デスッカリ区別ガツカナクナッテシマヒマシタ）

I. f 階ノ tensor space P_f ニ於テ，full linear group $GL(n)$ デ induce サレタ linear transformation 全体ノ linear closure ヲ $\mathfrak{A}$，一方

symmetric group π_f ニヨル linear transformation 全体ノ linear closure ヲ γ トスルト，$\mathfrak{a}$, γ ハ完全可約デ互ニ他ノ commutator algebra デアル。

II. γ ハ π_f ノ group ring ρ ノ homomorphic ナ表現ニナッテヰルが，表現が 0 ニナル全体ノナス ρ ノ ideal ヲ ρ^0 トスルト $\rho = \rho_0 + \rho^0$ トシテ ideal $\rho_0 \cong \gamma$ がキマル。コノトキ ρ_0 ノ左 ideal σ ニ関スル構造ハ P_f ノ $\mathfrak{a}$-subspace Σ ニ関スル構造ト全ク類似シテヰル。即チ σ ト Σ トハ

$$\sigma \rightarrow \hat{\sigma} P_f = \Sigma \tag{1}$$

デ一對一ニ對應シ、直和ハ直和ニ，isomorphic ナモノハ isomorphic ナモノヘト對應スル。

$$(\ \sigma = \rho e,\ e^2 = e \text{ ナラバ } \Sigma = \hat{e} P_f \text{ トナル})$$

III (ρ ノ構造)

ρ ハ完全可約デアルが、ソレハ f ノ partition

$$(\lambda): \quad f = \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$$
$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_r > 0 \cdots (2)$$

ニ對應シテ次ノ様ニ直既約 ideal ニ分解サレル。

$$\rho = \sum_{(\lambda)} \mathfrak{a}^{(\lambda)} \tag{3}$$

$\mathfrak{a}^{(\lambda)}$ ニ含マレル既約ナ左 ideal ハ (λ) ナル partition ニ對應スル例ノ diagram カラ作ラレタ idempotent

$$e^{(\lambda)} = \frac{1}{\mu^{(\lambda)}} c^{(\lambda)}, \quad c^{(\lambda)} = b^{(\lambda)} a^{(\lambda)}$$

デ與ヘラレルトコロノ $\rho c^{(\lambda)}$ = *isomorphic* デアル。

ソシテ

$$\varepsilon^{(\lambda)} = \frac{1}{\mu^{(\lambda)^2}} \sum_{t \in \pi_f} t^{-1} c^{(\lambda)} t$$

トオケバ $\mathfrak{a}^{(\lambda)} = \rho\varepsilon^{(\lambda)}$, $\varepsilon^{(\lambda)^2} = \varepsilon^{(\lambda)}$ デアル. (C.G. p 126)

IV. (2) ノ *partition* (λ) ニ對應スル $c^{(\lambda)}$, $\varepsilon^{(\lambda)}$ ヲ考ヘルトキ

$r \leqq n$ ナラバ $\hat{c}^{(\lambda)} P_f \neq 0$, $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f \neq 0$

$r > n$ ナラバ $\hat{c}^{(\lambda)} P_f = 0$, $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f = 0$

(C. G. P. 128 參照. ソコデハ $c^{(\lambda)} P_f$ 等ヲ扱フガ、$\hat{c}^{(\lambda)} P_f$ デモ殆ンド同様デアル)

第一ノ場合ノ (λ) ヲ *proper* ナ *partition* ト呼バウ。

尚, $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)}$ デアル。

V. (ρ_0 ノ構造)

ρ_0 ハ (3) カラ *proper* ナル (λ) ニ對應スル部分ダケヲ全部集メタモノデアル. $\rho_0 = \sum_{(\lambda)} \rho\varepsilon^{(\lambda)}$, (λ) ハ *proper*

(証) $\varepsilon^{(\lambda)} \in \rho_0$ ナラ $\rho_0 \varepsilon^{(\lambda)} = \rho\varepsilon^{(\lambda)} \neq 0$ 故ニ II ニヨリ $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f \neq 0$

又 $\varepsilon^{(\mu)} \notin \rho_0$ ナラ $\varepsilon^{(\mu)} \in \rho^0$ $\quad \therefore \varepsilon^{(\mu)} P_f = 0$

VI. ρe ($e^2 = e$) ヲ表現加群トシタトキノ π_f ノ表現ノ *character* ハ

$$\chi(s)=\sum_t e(t^{-1}s^{-1}t)=\sum_t e(t^{-1}st)$$

デアル。

(証) 前半ハ C. G. p105. 後半ハ $\chi(s)$ ガ class function ナルコトヨリ $\chi(s)=\chi(s^{-1})$ ダカラデアル。

VII. 上ニ於テ特ニ $e=\frac{1}{\lambda_1!\cdots\cdots\lambda_r!}a^{(\lambda)}$ トスルト $Pa^{(\lambda)}$ ニヨル π_f ノ表現ノ character ヲ得ル. ソレヲ $\psi^{(\lambda)}(s)$ トカケバ

$$\sigma(s)=\sum\psi^{(\lambda)}(s)\,\varepsilon_1^{\lambda_1}\cdots\cdots\varepsilon_n^{\lambda_n} \tag{4}$$

トナル. 但シ $\sigma(s)$ ハ S ヲ cycle デ表示シタトキニ長サ $1, 2, \cdots\cdots$ ノ cycle ガ夫々 $\alpha, \beta, \cdots\cdots$ ケアッタトスルト

$$\sigma(s)=\sigma_1^{\alpha}\sigma_2^{\beta}\cdots\cdots,\quad 但シ\ \sigma_i=\varepsilon_1^i+\cdots\cdots+\varepsilon_n^i$$

トスル ($\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n$ ハ変数) (C. G. p210)

VIII. eP_f ヲ表現加群トシタトキノ $GL(n)$ ノ表現ノ character ハ

$$X(A)=Sp(A_f\,U(e))$$

デアル、但シ A_f, $U(e)$ ハ夫々 A, e ニヨリ P_f ノ linear transformation ノ matrix トスル (一ツノキメタ座標系デ)

(証) eP_f ノ一ツノ base ヲ $F_1, \cdots\cdots, F_h$ トシ, ソレニ $F_{h+1}\cdots\cdots F_{nf}$ ヲツケ加ヘテ P_f ノ base トスル,

$$A(F_1, \cdots\cdots, F_h, F_{h+1}, \cdots\cdots, F_{nf})$$
$$=(F_1, \cdots\cdots, F_h, \cdots\cdots F_{nf})\begin{pmatrix}\Phi(A) & * \\ 0 & *\end{pmatrix}$$

両辺ニeヲ operate スルト

$$eA(F_1, \cdots\cdots, F_k, \cdots\cdots F_n f)$$
$$=(F_1 \cdots\cdots F_k, eF_{k+1} \cdots\cdots eF_n f)\begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$
$$=(F_1 \cdots\cdots F_k, F_{k+1}, \cdots\cdots F_n f)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$
$$=(F_1 \cdots\cdots F_k, F_{k+1} \cdots\cdots F_n f)\begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

サテ $\chi(A) = Sp(T(A))$ デアルガ上式ヨリ，ソレハ eA ニヨル P_f ノ linear transformation ノ Spur ニ等シイ．即チ $Sp(U(e)A_f) = Sp(A_f U(e))$ デアル。

IX．上ニ於テ特ニ $\hat{e} = \frac{1}{\lambda_1! \cdots\cdots \lambda_r!} a^{(\lambda)}$ トオクト $a^{(\lambda)}P_f$ ニヨル $GL(n)$ ノ表現ノ character ガ得ラレル $(\hat{a}^{(\lambda)} = a^{(\lambda)})$．ソレヲ $\Psi^{(\lambda)}(A)$ トカケバ

$$\Psi^{(\lambda)}(A) = u_{\lambda_1} \cdots\cdots u_{\lambda_r}$$

茲ニ $u_\lambda = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\lambda} \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{\alpha_n}$ （λ-te Wronskische Funktion aleph）トスル．但シ ε_i ハ A ノ characteristic roots トスル。

（証）$\Psi^{(\lambda)}(A) = Sp\left(A_f U\left(\frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots\cdots} a^{(\lambda)}\right)\right)$

$$= \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots\cdots} \sum_p Sp(A_f U(p))$$

$$(\because\ a^{(\lambda)}=\sum_{p} p)$$

然ルニ $S_p(A_f U(s))=\sigma(s)$ が言ヘル(X). 故ニ

$$\Psi^{(\lambda)}(A)=\frac{1}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\cdots}\sum_{p}\sigma(p)$$

$$=\frac{1}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\cdots}\sum_{p_1}\sigma(p_1)\sum_{p_2}\sigma(p_2)\cdots\cdots$$

但シ $\sum_{p_i}$ ハ young ノ dragram デ第 i 行ノ文字ノミヲ入レカヘル permutation 全体ニ亘ル和トスル。

トコロが, ヨク知ラレテヰルマウニ

$$u_\lambda=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\lambda}\varepsilon_1^{\alpha_1}\cdots\cdots\varepsilon_n^{\alpha_n}=\frac{1}{\lambda!}\sum_{s\in\pi_\lambda}\sigma(s)$$

(C. G. p215. 参照. ソコニ注意サレテヰルマウニ, 直接証明サレル.)

デアルカラ $\Psi^{(\lambda)}(A)=u_{\lambda_1}u_{\lambda_2}\cdots\cdots u_{\lambda_r}$

X. $S_p(A_f U(s))=\sigma(s)$

(証) $A_f=\|a_{i_1j_1}\cdots\cdots a_{i_fj_f}\|$,

$$U(s)=\left\|\delta^{i_1'\cdots\cdots i_f'}_{j_1\cdots\cdots j_f}\right\|$$

$$\therefore\ A_f U(s)=\|a_{i_1'j_1}\cdots\cdots a_{i_f'j_f}\|$$

$s'=r^{-1}sr$ ナラバ $S_p(A_f U(s'))=S_p(A_f U(s))$ ナルコトハ定理Iニヨリスグワカルカラ, $A_f U(s)$ ノ Spur ヲトルニ當ツテハ

$$s=[(1\ 2\cdots\cdots p)(p+1\cdots\cdots p+q)\cdots\cdots]^{-1}$$

トシテモヨイ．スルト

$$Sp(A_f U(s))$$

$$= Sp\| a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_3} \cdots\cdots a_{i_p j_1} a_{i_{p+1} j_{p+2}} \cdots\cdots \|$$

$$= \sum_{i_1,\cdots i_f} (a_{i_1 i_2} \cdots\cdots a_{i_p i_1})(a_{i_{p+1} i_{p+2}} \cdots\cdots) \cdots\cdots$$

$$= Sp(A^p)\, Sp(A^q) \cdots\cdots = \sigma_p \sigma_q \cdots\cdots$$

$$= \sigma_1^{\alpha} \sigma_2^{\beta} \cdots\cdots = \sigma(s)$$

但シ α, β …… ハ s ノ長サ夫々 $1, 2,$ …… ナル cycle ノ箇数デアル．

（此ノ証明ハ Schur, Sitzungsbericht (Berlin) 1927 ノ §1 ヨリ）

XI. コヽニ現ハレタ $Sp(A_f U(s))$ ハ又次ノ意味ヲ持ツ．

$$Sp(A_f U(s)) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s)\, X^{(\lambda)}(A)$$ (λ) ハ proper

但シ $\chi^{(\lambda)}(s)$, $X^{(\lambda)}(A)$ ハ夫々 $\rho C^{(\lambda)}$, $\hat{C}^{(\lambda)} P_f$ ニヨル π_f, $GL(n)$ ノ表現ノ character トスル。

（証） V, II ニヨリ適當ナ P_f ノ座標系ニ対シ $\mathfrak{A}$ ノ A_f ハ

$$A_f = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \boxed{\begin{matrix} A^{(\lambda)} & & \\ & \ddots & \\ & & A^{(\lambda)} \end{matrix}}\; g^{(\lambda)}\text{ヶ} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

トカケル $A^{(\lambda)}$ ハ $\hat{C}^{(\lambda)} P_f$ ニヨル既約表現デ $g^{(\lambda)}$ ハ $\rho C^{(\lambda)}$ ノ階数ニ等シイ．之ヲ簡単ニ

$$A_f = \sum_{(\lambda)} E_{g^{(\lambda)}} \times A^{(\lambda)} \qquad (\lambda) \text{ ハ proper}$$

トカケル.（$\sum$ ハココデハ matrix ノ直和, $\times$ ハ Kronecker 積, $E_{g^{(\lambda)}}$ ハ $g^{(\lambda)}$ 次ノ単位行列）

I ニヨリ $U(s)$ ハスベテノ A_f ノ可換ダカラ

$$U(s) = \sum B^{(\lambda)} \times E_{h^{(\lambda)}}, \quad h^{(\lambda)} \text{ ハ } A^{(\lambda)} \text{ ノ degree}$$

ナル形ヲナス.

$B^{(\lambda)} \times E_{h^{(\lambda)}}$ ハ $\varepsilon^{(\lambda)} P_f$ ニヨル π_f ノ表現ニナッテ井ルガ, $\varepsilon^{(\lambda)} P_f$ ガ $P\varepsilon^{(\lambda)}$ ト加群デアリ, $P\varepsilon^{(\lambda)}$ ノ主単位元ナル $\varepsilon^{(\lambda)}$ ガ Einheitsoperator デアルコトニ注意スレバ, ソノ既約ナ部分ハ $PC^{(\lambda)}$ ト isomorphic. 然ルニ一方 $B^{(\lambda)}$ ハ既約デアル. 故ニ $B^{(\lambda)}$ ハ $PC^{(\lambda)}$ ニヨル π_f ノ表現 $U^{(\lambda)}(S)$ ニ等シイ:

$$U(s) = \sum U^{(\lambda)}(s) \times E_{h^{(\lambda)}}$$

一般ニ $(A \times B)(A_1 \times B_1) = AA_1 \times BB_1$ デアルコトニ注意スレバ

$$A_f U(s) = \sum_{(\lambda)} U^{(\lambda)}(s) \times A^{(\lambda)}$$

$$\therefore \quad Sp(A_f U(s)) = \sum_{(\lambda)} Sp(U^{(\lambda)}(s))\, Sp(A^{(\lambda)})$$

$$= \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s)\, X^{(\lambda)}(A)$$

但シコノ $\sum$ ハ普通ノ和デアル。

XII. $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n$ ヲ変数ト考ヘタトキ $X^{(\lambda)}(A)$ ヲ $X^{(\lambda)}$ トカケバ

$$\sigma(s) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s)\, X^{(\lambda)}$$

(證) XI, XII ニヨレバヨイ．（$X^{(\lambda)}$ ハ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n$ ノ f 次ノ同次對稱式ナルコト明カデアル）

XIII. $l_i = \lambda_i + (n-i)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ トシ，又 $|\varepsilon_i^{l_k}|$ ナル行列式ヲ $|\varepsilon^{l_1}\cdots\cdots\varepsilon^{l_n}|$ トイフ風ニカクコトニスレバ

$$\frac{|\varepsilon^{l_1}\cdots\cdots\varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}\cdots\cdots\varepsilon^{0}|} = |u_{\lambda_i - i + j}|$$

$$\left(u_p = \begin{cases} 1 & p=0 \\ 0 & p<0 \end{cases} \text{トスル} \right)$$

トナルコトハヨリ知ラレテキル．（C.G. P.203）之レヲ $\widetilde{X}^{(\lambda)}$ トカケバ $\sigma(s)$ ハ $\widetilde{X}^{(\lambda)}$ ノ linear combination トシテ表セル．ソノ係數ヲ $\widetilde{\chi}^{(\lambda)}(s)$ トカコウ．

$$\sigma(s) = \sum_{(\lambda)} \widetilde{\chi}^{(\lambda)}(s)\, \widetilde{X}^{(\lambda)} \qquad (\lambda)\ \text{ハ proper}$$

(證) proper ナ (λ) ニ對應スル $\widetilde{X}^{(\lambda)}$ 全体ガ f 次ノ對稱式全体ノナス vector space ノ base ヲナスコトヲ示セバヨイ．$\widetilde{X}^{(\lambda)} = \varepsilon_1^{\lambda_1}\varepsilon_2^{\lambda_2}\cdots\cdots\varepsilon_n^{\lambda_n} + \cdots\cdots$ ダカラ $\widetilde{X}^{(\lambda)}$ ガ皆独立ナルコトハ明デアル。

f 次對稱式ノ次元ハ明カニ $x_1^{\lambda_1}\cdots\cdots x_n^{\lambda_n}$ $(\lambda_1 \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_n,\ f = \lambda_1 + \cdots\cdots + \lambda_n)$ ナル單項式ノ數デアルカラ，ソレハ丁度 proper ナ (λ) ノ個數ニ等シイ。

XIV. $\widetilde{X} = \sum \pm \Psi^{(l_1 - r_1,\ \cdots\cdots,\ l_n - r_n)}$

$$\tilde{x}^{(\lambda)} = \sum \pm \psi^{(l_1-r_1, \cdots\cdots, l_n-r_n)}$$

但シコノ和ハ alternating sum トスル ── 即チ $r_1, \cdots\cdots, r_n$ ハ $1, \cdots\cdots, n$ ノ permutation デ，ソレガ even ナルカ odd ナルカニ應ジテ ± ハ + カ − タトル。又 $\Psi^{(l_1-r_1, \cdots\cdots, l_n-r_n)}$ ハ $l_1-r_1, \cdots\cdots, l_n-r_n$ ナル partition（コノマヽデハ大イサノ順ニナッテヰナイ）ヲ (λ) トスルトキ $\Psi^{(\lambda)}$ ヲ意味スルモノトスル。$\psi(l_1-r_1, \cdots\cdots, l_n-r_n)$ モ同様。

（証）
$$\tilde{X}^{(\lambda)} = \sum \pm u_{l_1-r_1} \cdots\cdots u_{l_n-r_n}$$
$$= \sum \pm \Psi^{(l_1-r_1, \cdots\cdots, l_n-r_n)} \qquad (\text{IX} \text{ ニヨル})$$

$\tilde{x}^{(\lambda)}(S)$ ノ方ハ $\sigma(S) = \sum_{(\lambda)} \tilde{x}^{(\lambda)}(S)\, \tilde{X}^{(\lambda)}$ ノ係數トシテ定義サレタノデアルカラ

$$\sigma |S| \, |\varepsilon^{n-1} \cdots\cdots \varepsilon^{0}| = \sum \tilde{x}^{(\lambda)}(S) \, |\varepsilon^{l_1} \cdots\cdots \varepsilon^{l_n}|$$

VII ニヨリ 左辺 $= \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=f} \psi^{(\lambda)}(S)\, \varepsilon_1^{\lambda_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{\lambda_n} \sum \pm \varepsilon_1^{r_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{r_n}$

$$= \sum \pm \psi^{(\lambda)}(S)\, \varepsilon_1^{\lambda_1+r_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{\lambda_n+r_n}$$

両辺ノ $\varepsilon_1^{l_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{l_n}$ ノ係數ヲ比較シテ

$$\tilde{x}^{(\lambda)}(S) = \sum \pm \psi^{(l_1-r_1, \cdots\cdots, l_n-r_n)}(S)$$

XI. $\rho a^{(\lambda)}$ ニ含マレル既約部分ハソレゾレ $\rho C^{(\mu)}$ ニ isomorphic ダガ，コノトキ $(\mu) \geqq (\lambda)$ デアル。（partition ノ位ノツケ方ハ普通ノ通リ）

（証） $c^{(\mu)} \rho a^{(\lambda)} = 0 \qquad (\mu) < (\lambda)$

$$c^{(\lambda)} \rho a^{(\lambda)} \neq 0$$

ダカラデアル (C. G. p.124, (3.4))

XVI. $\tilde{\chi}^{(\lambda)} = \chi^{(\lambda)}$, $\tilde{\chi}^{(\lambda)}(S) = \chi^{(\lambda)}(S)$

(証) XIV ニヨリ $\tilde{\chi}^{(\lambda)}$, $\tilde{\chi}^{(\lambda)}$ ハ夫々 compound character Ψ, ψ ノ linear combination デ表ハサレルカラ, 従ッテ又 primitive ナ character χ, χ デ表サレル. $\tilde{\chi}^{(\lambda)}$ ノ方ヲマトメテ matrix Λ ヲ使ヒ

$$(\tilde{\chi}^{(\alpha)}, \cdots\cdots, \tilde{\chi}^{(\lambda)}, \cdots\cdots, \tilde{\chi}^{(\omega)}) = (\chi^{(\alpha)} \cdots\cdots \chi^{(\omega)})\Lambda \cdots (5)$$

トカケバ, $(\alpha) > \cdots\cdots > (\lambda) > \cdots\cdots > (\omega)$ トスルト Λ ハ

$\Lambda = (\lambda_{ij})$ $\lambda_{ij} = 0$, $i < j$ ナル形トナル:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

何トナレバ

$$(\tilde{\chi}^{(\alpha)} \cdots\cdots \tilde{\chi}^{(\omega)}) = (\Psi^{(\alpha)} \cdots\cdots \Psi^{(\omega)})\Lambda_1$$
$$(\Psi^{(\alpha)} \cdots\cdots \Psi^{(\omega)}) = (\chi^{(\alpha)} \cdots\cdots \chi^{(\omega)})\Lambda_2$$

トスルト Λ_1, Λ_2 ハ共ニ上記ノ型ノ matrix デアリ (Λ_2 ノ方 XV, II カラ明カ. Λ_1 ノ方ハ XIV ノ第一式カラ見エル) $\Lambda_2\Lambda_1 = \Lambda$ ダカラデアル. 又 Λ_1, Λ_2 ノ形カラ明カナヤウニ, $\lambda_{ii} > 0$ デアル. 又 XIII, XV ニヨリ, 同ジ Λ ヲ用ヰテ

$$(\tilde{\chi}^{(\alpha)} \cdots\cdots \tilde{\chi}^{(\omega)}) = (\chi^{(\alpha)} \cdots\cdots \chi^{(\omega)})\Lambda$$

故ニ XII, XIII ト併セテ

$$(X^{(\alpha)} \cdots\cdots X^{(\omega)}) \begin{pmatrix} x^{(\alpha)}(s) \\ \vdots \\ x^{(\omega)}(s) \end{pmatrix} = (X^{(\alpha)} \cdots\cdots X^{(\omega)}) \Lambda\Lambda' \begin{pmatrix} \chi^{(\alpha)}(s) \\ \vdots \\ \chi^{(\omega)}(s) \end{pmatrix}$$

但シΛ'ハΛヲ transposeシタモノトスル。

$X^{(\lambda)}$ハ独立デアル。（(5)ヨリ）. 又更ニ$\chi^{(\lambda)}(s)$モ一次独立.

故ニ$\Lambda\Lambda' = E$. $\Lambda' = \Lambda^{-1}$, Λノ型ヲ考慮スレバ Λハ diagonal matrix デアル. $\Lambda\Lambda' = E$ダカラ diagonal element λ_{ii}ハ$\lambda_{ii}^2 = 1$. $\lambda_{ii} > 0$ダカラ $\lambda_{ii} = 1$. $\therefore\ \Lambda = E$ 故ニ$\widetilde{X}^{(\lambda)} = X^{(\lambda)}$, $\widetilde{X}^{(\lambda)} = x^{(\lambda)}$ ヲ得ヲ. 即チ

XVII. （結論）

$\hat{C}^{(\lambda)} P_f$ ニヨル $GL(n)$ ノ表現ノ character (primitive) ハ

$$X^{(\lambda)}(A) = \frac{|\varepsilon^{l_1} \cdots\cdots \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1} \cdots\cdots \varepsilon^{0}|} \quad (= |u_{\lambda_i - i + j}|)$$

デアル. ソシテ $\rho C^{(\lambda)}$ ニヨル $\mathfrak{S}_f$ ノ表現ノ character ヲ $\chi^{(\lambda)}(s)$トスレバ

$$\sigma(s) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s)\, X^{(\lambda)}(A) \qquad (\lambda)\text{ハ proper}$$

ナル関係ガ成立スル。

——（終リ）——