# 1021. Regular vector lattice ニツイテ

小笠原 藤次郎(広島文理大)

積分論其ノ他ヘノ應用ヲ顧慮シテ regular vector lattice ニ關スル二三ノ事実ニツイテ述ベタイ。

§1. <u>定理1.</u> Bochner ノ條件[1](次ニ示ス(α))ヲ

---

(1) S. Bochner, Proc. Nat. Acad. Sci. 26 (1940) 29–31

満足スル vector lattice ハ regular (型 $K_6$ ノ)[2] デアル。

(α) (o)-連続正線型汎函数列 $f_n(x)$ ガ存在シ任意ノ正ノ単調列 $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots$ ニ対シ各々ノ $n$ ニツイテ $f_n(x_m)$ ガ有界ノトキ $\vee x_m$ ガ存在スル。

(証) (α) ヲ満足スル vector lattice ヲ $X$ トスレバ (α) カラ $X$ ハ $\sigma$-complete デアル。今 $\rho(x)$ トシテ

$$\rho(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f(|x|)}{1+f(|x|)}$$

ト置クトキ

(i) $\rho(x) \geqq 0$, $x = 0$ ノトキニ限リ $\rho(x) = 0$

(ii) $\rho(x+y) \leqq \rho(x) + \rho(y)$

(iii) $|x| < |y|$ ノトキ $\rho(x) < \rho(y)$

(iv) $x_n \downarrow 0$ ノトキ $\rho(x_n) \to 0$

(v) $x_n > 0$, $x_n \uparrow \infty$ ノトキ

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{p\to\infty} \rho(x_{n+p} - x_n) > 0,$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \lim_{n\to\infty} \rho(\lambda x_n) > 0$$

コレカラ $X$ ハ型 $K_6$ ノ regular ナルコトヲ知ル。[3]

例. 数列空間 (s) ハ (α) ヲ満足スル。$f_n(x)$ トシテ $x$ ノ $n$ 番目ノ成分ヲ表ス数トスレバヨイ。Bochner[4] ハ $L_p$

---

(2) L. Kantorovitch, Recueil Math. 7 (1940) 211.

(3) L. Kantorovitch, Recueil Math. 2 (1937) 121-168.

(4) S. Bochner, 上掲

空間ハ(ふ)ヲ満足スルト述ベテヰルガ此ハ正シクナイ。

次ニXヲ regular vector lattice トシテ normal ideal ノ作ル complete Boolean algebra ノ表現 Boole 空間[5]ヲ $\Omega$ トスル．簡単ノタメXガ単位 $e$ ヲ有スル場合ヲ考ヘル．$\Omega$ 上非稠密点ヲ除イテ有限値ヲトル連続函数全体 $\mathcal{L}_\Omega$ ハ complete vector lattice ヲ作ルコトハ既ニ分ッテヰルガXガ regular ノトキ次ノ定理が成立スル。

<u>定理2</u>. Xガ単位 $e$ ヲ有スル型 $K_6$ ノ regular vector lattice ナラバ $\mathcal{L}_\Omega$ ハ型 $K_6$ ノ regular vector lattice デアル。

(証) 定理1ノ証明中ノ $\rho(x)$ ニ当ルモノヲ作レバコノ場合ト同様ノ過程ニヨッテ証明サレル。

$x \in \mathcal{L}_\Omega$ ニ對シテ $\rho(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ ト置ケバヨイ．$\rho(x) \in X$ デアル $\Omega$ ニXヲ値域トスル測度 $\mu(E)$ ノ導入ニヨリ

$$\rho(x) = \int_\Omega \frac{|f_x(\mathfrak{p}^*)|}{1+|f_x(\mathfrak{p}^*)|}\mu|dt|$$

ト書クコトガ出来ル．コレニ依ッテS空間ノ場合ト同様ニ証明出来ルワケデアル．

<u>例</u>. $X = M$ トスレバ $\mathcal{L}_\Omega = S$ ヲ，$X = (l)$ トスレバ $\mathcal{L}_\Omega = (s)$ ヲ示シテヰル．後ノ例ノ如ク $e$ ヲ $e_i > 0$ ニ分

---

(5) 紙上数学談話會 998, 999．コノ中記法及ビ定義ニ從フ。

ケ $e = \vee e_i$, $e_i \wedge e_j = 0\ (i \neq j)$, $e_i$ ニ對スル $\mathfrak{R}_i$（上ノ例デハ一点カラナル）ヲ作ッテ $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}_i}$ ノ直和（$\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}$ ニナル）ヲ論ズル方ガ便利ノ場合ガアル。

<u>定理3.</u> 定理2ノ假定ノ下ニ次ノ二ツノ命題ハ互ニ對等デアル。

(i) $x_n \in X$ ガ $x \in X = \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}$ デ (0) ― 收斂スル。

(ii) $x_n \in X$ ガ任意ノ主 ideal（$X$ 内ノ）ガ與ヘラレタトキ空デナイ部分主 ideal ガ存在シテコレニ於ケル $x_n$ ノ成分ガ $x$ ノソレニ (0) ― 收斂スル。

(注) $x_n$ ガ (0) ― 有界ノトキ (i), (ii) ハ何レモ (0) ― 收斂ヲ表ス、（コレハ $\sigma$-complete ノ場合デモ成立スルコトデハアルガ）

(証) 定理2カラ、$\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}$ ノ regular ヲ利用シテ

コノ定理カラ $X$ ニ新シイ收斂ノ型ガアルコトガ分ル．上例デ函数空間 $L$ ニツイテ云ヘバ $L$ ノ函数列ガ殆ンド総テノ点デ $L$ ノ函数ニ收斂スルコトデアリ、今迄ハ論ゼラレナカッタモノデアル。

<u>定義</u> $x_n$, $x$ ガ定理3ノ (ii) ヲ滿足スルトキ $x_n$ ハ $x$ ニ廣義ノ (0) ― 收斂ヲスルトイフ。

コノ概念ノ使用ニツイテハ別ノ機會ニ述ベル。

§2. 定理2ニ於テ $P(x)$ ガ vector 値ヲトルモノニ出會ッタ．茲デ同ジヤウナ考ヘ方ニ從ッテ

<u>定理4.</u> $X$ ヲ vector lattice トシ任意ノ $x \in X$ ニ $K_6^-$（non-proper axiom ヲ滿足スル）[6] 型ノ

regular vector lattice ノ正要素 $|x|$ ガ惻度シ次ノ條件ヲ満足スルトキ X モマタ $K_6^-$ (non-proper axiom ヲ満足スル) 型ノ regular vector lattice デアル。

(1) $|x| \geqq 0$, $x=0$ ノトキニ限リ $|x|=0$

(2) $|x+y| \leqq |x|+|y|$ $|\alpha x|=|\alpha||x|$

(3) $|x|<|y|$ ノトキ $|x|<|y|$

(4) $x_n \downarrow 0$ ノトキ $|x_n| \downarrow 0$

(5) $0<x_n \leqq x_{n+1}$, $|x_n|$ ガ (0) − 有界ノトキ $\bigvee x_n$ ガ存在スル。

(証) 実数デ norm ガ定義サレタ場合ト同様デアル。

次ノ X ヲ $K_6^-$ ($K_6$) 型ノ或ハ non-proper axiom ヲ満足スル regular vector lattice トシ表現 $\mathcal{L}_\Omega$ ニヨリ $|x|^p$ $0<p<+\infty$ ヲ定義スルトキ $|x|^p \in X$ ナル如キ $x$ ノ全体ヲ $X^p$ トスレバ ($x \in X$ ナルコトハ要求シナイ、例ヘバ ($l$) 空間ノ場合ヲ考ヘレバ分ル) 次ノ定理ガ成立スル。

<u>定理</u>. X ガ regular ノトキ $X^p$ ハ同ジ型ノ regular vector lattice デアル。

(証) 略。

---

(6) L. Kantorovitch, (3) ニ掲ゲタ論文. コノトキ $K_6$ 型ニナルコトガ示サレテヰル。