1017. 二，三ノ Jet ニ就テ

（東京芝浦豊田理化學研究所佐々木研究室）

佐藤　常三

ハシガキ

$z=0$ ヲ中心トスル単位円周上ニ於ケル $w(z)$ ノ実部分ヲ $\phi(\theta)$（但シ $z=e^{i\theta}$ トカク）トスレバ，$w(z)$ ハ

$$(1)\quad w(z)=i\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}d\theta.$$

$$w(0)=\alpha_0+i\beta_0$$

デ表ハサレル。Villat ハコノ公式ヲ基礎トシテ，物体ニ流体ガ突キ當ル場合ノ問題ヲ論ジテ居ル。（Leçons sur L'hydrodynamique, 1926）

(1) ノ実部分ヲトレバ，明ラカニ Poisson 積分トナル。

$\phi(\theta)$ ガ $\theta=\theta_0$ デ第一種ノ不連続性ヲ呈示スル例トシテ今

$$\begin{cases}\phi(\theta)=\phi(\theta_0-0)=\alpha, & 0\leqq\theta<\theta_0,\ \left(0\leqq\theta_0\leqq\frac{\pi}{2}\right);\\ \phi(\theta)=\phi(\theta_0+0)=\beta, & \theta_0<\theta\leqq\pi;\\ \phi(2\pi-\theta)=\phi(\theta)\end{cases}$$

ナル如キモノヲ與ヘテミヨウ。(1) ノ右辺ヲ計算スレバ

$$(2)\quad w(z_1)=w(0)-\frac{2(\alpha-\beta)}{\pi}\theta_0+\frac{\alpha-\beta}{i\pi}\log\frac{z-e^{i\theta_0}}{z-e^{-i\theta_0}}$$

$\pi\geqq\theta>\theta_0$ デハ

$$\mathfrak{R}w(e^{i\theta}) = \mathfrak{R}\left[w(0) - \frac{\alpha-\beta}{\pi}\theta_0\right];$$

$\theta_0 > \theta \geqq 0$ デハ $\qquad = \mathfrak{R}\left[w(0) + (\alpha-\beta) - \frac{\alpha-\beta}{\pi}\theta_0\right]$

トナルカラ $\theta = \theta_0$ デ $\beta - \alpha$ ナル jump ヲスル. (1) ニ於テ $\phi(\theta)$ ヲ與ヘタダケデハ $w(z)$ ハ附加常數ガ定マラナイ、吾々ノ條件ハ

$$\mathfrak{R}w(0) - \frac{\alpha-\beta}{\pi}\theta_0 = \beta, \quad \mathfrak{R}(w(0) + (\alpha-\beta)) - \frac{\alpha-\beta}{\pi}\theta_0 = \alpha$$

デアルカラ

$$\mathfrak{R}w(0) = \beta + \frac{\alpha-\beta}{\pi}\theta_0 = \frac{1}{\pi}\left\{\alpha\theta_0 + (\pi-\theta_0)\beta\right\}$$

デナケレバナラナイ。

特ニ $w(0) = 0$ デアルタメニハ

$$\alpha\theta_0 + (\pi-\theta_0)\beta = 0$$

ナルコトヲ要シ，明カニ α, β ハ互ニ異符号ナルコトガ要求サレル。

不連續流レ

二次元理想流体ノ運動ニ於テ速度ポテンシャルヲ ϕ，流レノ函数ヲ ψ トカキ，速度ヲ q，x 及ビ y ー軸（zー平面上ノ）方向ノ分値ヲ u，v トカケバ，次ノ如キ関係ガアル。

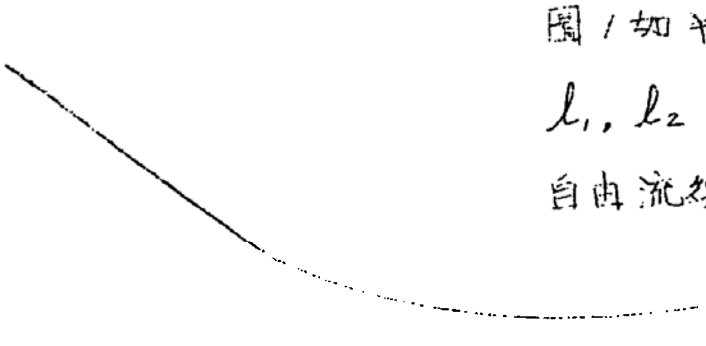
$$\left\{ w = f(z) = \phi + i\psi, \quad \frac{dw}{dz} = -u + iv; \right.$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y}; \\[2ex]
\dfrac{dw}{dz} = -e^{-i\omega}. \quad \omega = \theta + i\tau, \quad q = e^{\tau} \\[2ex]
\theta \text{ ハ速度ヴェクトルガ } x\text{-軸トナス角デアル。}
\end{array}
\right.
$$

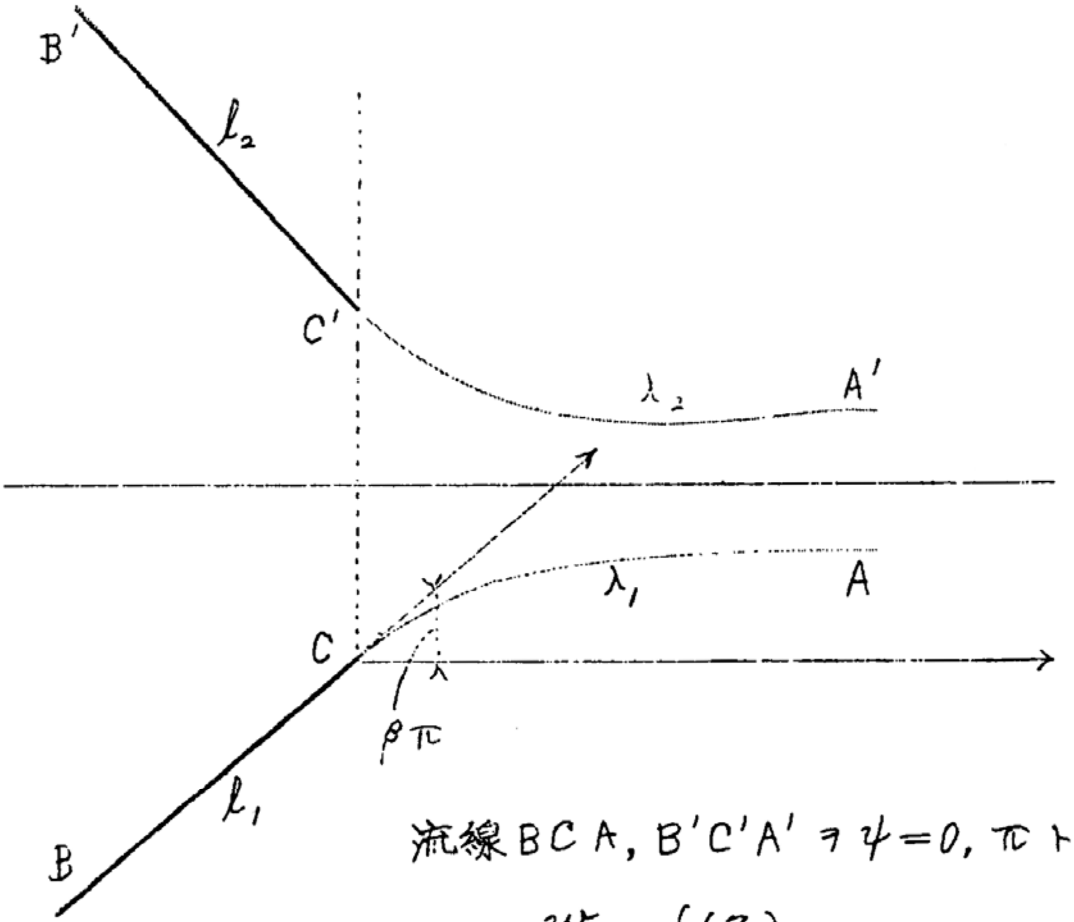
今吾々ハ流レガ物体ニアタル場合ニ生ズル流線問題ニ所謂 *Kirchhoff-Helmholz* ノ古典的理論ヲ用ヒルノデアルガ，今迄ノ教科書流ノ参考書ヤ諸種ノ文献ニ記載サレテアル *Hodograph* 法ヤ *Schwarz-Christoffel* 変換法等デハ，ソノ手順ガ極メテ複雑デ，殊ニ是レ等ノ変換法ノ途次ニ於ケル常数決定ガ自然的デナイヤウニ思ヘル．ソコデ私ハ *Villat* ノ流儀ニ倣ッテ若干ノ創意ヲ加ヘツヽ二、三ノ問題ヲ採リ上ゲテミヨウト思フ、併シ私ハ専門家デナイカラ間ノ抜ケタトコロハ，是非皆様ノ御教示ヲ仰ギタイ。

Plane Orifice

下ノ圖ノ如キ場合ノ研究デアル。上図ヲ對稱ニ折リ返セバ下圖ノ如キ場合ノ問題トナル。



l_1, l_2 ハ壁，λ_1, λ_2 ハ自由流線，$\beta\pi$ ハ壁ノ尖端 C ニ於ケル自由流線ノ方向角デアル。



流線BCA, B'C'A'ヲ$\psi=0, \pi$トシテ

$$w = f(z)$$

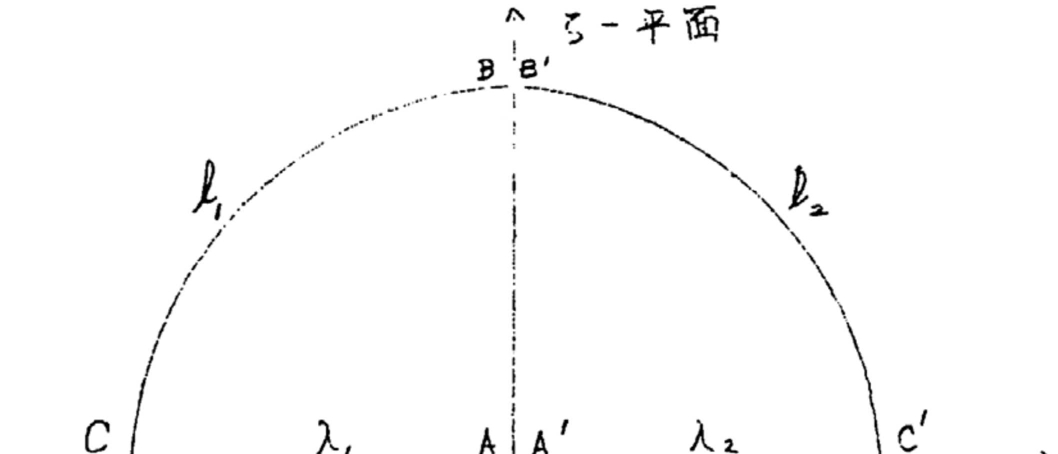
ニヨッテ w－平面上ニ對應サセテ，サラニコノ帶狀領域ヲ

$$w_1 = e^{w}$$

ニヨッテ w_1－平面上ノ上半面ニ寫シ，更ニ又

$$w_1 = -\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1})$$

ニヨッテζ－平面上ノ單位円内ニ寫セバ，ソノ對應關係ハ下ノ圖ノ如クニナル。圖ニ於テ



l_1 上デハ　　$\theta = \beta\pi$;

l_2 上デハ　　$\vartheta = -\beta\pi$

λ_1 及ビ λ_2 上デハ　　$\tau = 0$ $(q = 1)$

w ヲ ζ ノ函數トミテ

$$Rw(e^{i\sigma}) = \theta = \phi(\sigma), \quad (0 \leqq \sigma \leqq \pi)$$

トカケバ，實軸デハ $w(\zeta)$ ハ實數値ヲトルカラ $\phi(2\pi - \sigma)$ $= \phi(\sigma)$ ト定義スレバ，$w(\zeta)$ ニ鏡像ノ原理ヲ適用スルコトが出来ル.

(2) カラ

$$(2') \quad w(\zeta) = 2\beta\pi - \frac{2\beta}{i}\log\frac{\zeta - i}{\zeta + i}, \quad (w(0) = 0)$$

故ニ

$$dz = -e^{iw}dw = e^{2\beta\pi i}\left(\frac{\zeta + i}{\zeta - i}\right)^{2\beta}\frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

今自由流線 λ_1 ニツイテ考ヘルコトニスル.

$$\frac{\zeta + i}{\zeta - i} = e^{-it} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqq t < \pi\right)$$

トオケバ

$$\cos t = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1}, \quad \sin t = \frac{-2\zeta}{\zeta^2 + 1}, \quad dt = \frac{2}{\zeta^2 + 1}d\zeta$$

デアルカラ

$$dZ = -e^{2\beta\pi i}(e^{-2\beta t i}\cot t\, dt;$$

トカケル。 $Z = 0$ ヲ $t = \frac{\pi}{2}$ ニ對應スル如クエラムナラバ

(3) $$Z=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\left\{\cos 2\beta(\pi-t)+i\sin 2\beta(\pi-t)\right\}\cot t\,dt$$

之ハ實, 虚部ニ分テバ

$$(3')\quad\begin{cases} x=-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\cos 2\beta(\pi-t)\cot t\,dt, \\ y=-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sin 2\beta(\pi-t)\cot t\,dt, \quad \left(\frac{\pi}{2}\leqq t<\pi\right) \end{cases}$$

コレ流線 入, ノ方程式デアル。

$\beta=\frac{1}{6}$ ニ對シテハ

$$(4)\quad\begin{cases} x=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-2\cos\dfrac{\eta}{2} \\ \qquad -\dfrac{1}{2}\log\dfrac{2\cos\frac{\eta}{3}-1}{2\cos\frac{\eta}{3}+1}-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos\frac{\eta}{3}}{1+\cos\frac{\eta}{3}}, \\ y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\log\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-3\sin\dfrac{\eta}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\log\dfrac{\sqrt{3}-2\sin\frac{\eta}{2}}{\sqrt{3}+2\sin\frac{\eta}{2}}, \end{cases}$$

$$\left[0<\eta\leqq\frac{\pi}{2}\right]$$

$\beta=\frac{1}{4}$ ニ對シテハ

$$(5)\quad\begin{cases} x=\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-2\cos\dfrac{\eta}{2}-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos\frac{\eta}{2}}{1+\cos\frac{\eta}{2}}, \\ y=\sqrt{2}-\log\tan\dfrac{3}{8}\pi-2\sin\dfrac{\eta}{2}+\log\tan\dfrac{\eta+\pi}{4} \end{cases}$$

$$\left[0<\eta\leqq\frac{\pi}{2}\right]$$

$\beta=\frac{1}{3}$ ニ對シテハ

$$(6)\begin{cases} x=\dfrac{9}{4}-\dfrac{3}{2}\log 2-3\cos^2\dfrac{\eta}{3}-\dfrac{3}{2}\log\sin\dfrac{\eta}{3}+\dfrac{1}{2}\log\sin\eta, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\log 2\right)-\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{2}{3}\eta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\log\dfrac{\sqrt{3}+\tan\frac{\eta}{3}}{\sqrt{3}-\tan\frac{\eta}{3}}, \end{cases}$$

$$\left[0<\eta\leqq\frac{\pi}{2}\right]$$

$\beta=\dfrac{1}{2}$ ニ對シテハ

$$(7)\begin{cases} x=-\log\tan\dfrac{\eta}{2}-\cos\eta, \\ y=1-\sin\eta, \qquad \left[0<\eta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$\beta=1$ ニ對シテハ

$$(8)\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}-\log\sin\eta-\dfrac{1}{2}\cos 2\eta, \\ y=\dfrac{\pi}{2}-\eta-\dfrac{1}{2}\sin 2\eta, \quad \left[0<\eta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

(7) 及ビ (8) ハ普通ノ參考書ニ掲ゲラレテアル例デアル. 前者ハ無限ニ拡イ水槽ノ底ニアケラレタ orifice カラ流体ガ自由噴出スルトキノ流線デアリ, 後者ハ Borda ノ mouth-piece ノ場合デアル。

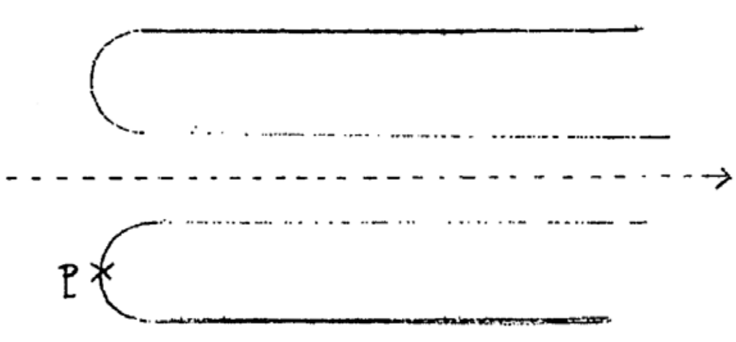
流線ノ intrinsic equation ハ

$$ds=|dz|=-\cot\eta\, d\eta$$

ヲ積分スレバ

$$s=\log(\operatorname{cosec}\eta) \quad 又ハ \quad e^{-s}=\sin\eta$$

$$(0\leqq s<\infty)$$



圖ニ示スヤウナ Borda ノ mouth-piece ノ場合ニハ P 点ノヤウニ突キ出ル場所ガ生

ガル。如何ナル壁ノ傾角βニ對シテ、如何ナル坐標ヲ有ツカヲシラベテミヨウ。流線ノ方向角ヲθトスレバ

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds} = \cos 2\beta\eta, \quad \sin\theta = \frac{dy}{ds} = \sin 2\beta\eta$$

ソコデ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ナル如キ位置ガ生ズルタメニハ, $2\beta\eta = \frac{\pi}{2}$, $\eta = \frac{\pi}{4\beta}$ 故ニβハ $1 \geqq \frac{1}{2\beta} > 0$ ナルコトヲ要ス. シカルニ $0 \leqq \beta \leqq 1$ ナルヲ以テ $1 \geqq \beta \geqq \frac{1}{2}$. 従ツテ問題ノ如キ点ハ $1 \geqq \beta \geqq \frac{1}{2}$ ナル限リ常ニ存在シ, ソノ位置ハ $\eta = \frac{\pi}{4\beta}$ トオイテ計算サレル。

例ヘバ Borda ノ呑口ノ場合ニハ $\eta = \frac{\pi}{4}$; コレヲ(8)ニ代入スレバ

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} \fallingdotseq -0.1534, \\ y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \fallingdotseq 0.2854 \end{cases}$$

Coefficient of Contraction（略号C.C.）

實際ハ contracted vein ハ噴出孔ノ附近ニ生ズルノデアルガ, 理論上デハ

$$C_\beta = \frac{\pi}{\pi + 2y_\infty}$$

ト定義サレル. y_∞ ハ無限遠方ニ於ケル y ノ値デアリ, C_β ハβニ應ズル C.C. ノ値ト云フ意味デアル. (4)――(8) ノ式ヲ用ヒレバ容易ニ

β	0	1/6	1/4	1/3	1/2	1
y_∞	0	$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	$\sqrt{2}-\log\tan\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{2}-\log 2\right)$	1	$\frac{\pi}{2}$
C_β	1	0.787	0.746	0.691	0.611	0.5

近似式

(3)ノ代リニソノ近似式ヲ採ル。Fourier 級数ニ積分下ノ展開シテ最初ノ三、四ノ項ダケヲトルト

$$
(9)\left\{
\begin{aligned}
x &= -\frac{4\beta\sin 2\beta\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{8\beta^2}\log\sin t+\frac{1}{4\beta^2-1}\left(\log\tan\frac{t}{2}+\cos t\right)\right. \\
&\quad +\frac{1}{4\beta^2-4}\left(\log\sin t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\right) \\
&\quad \left.+\frac{1}{4\beta^2-9}\left(\log\tan\frac{t}{2}+\cos t+\frac{4}{3}\cos^3 t\right)\right\}, \\
y &= \frac{2\sin 2\beta\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{4\beta^2-1}(\sin t-1)\right. \\
&\quad +\frac{1}{2\beta^2-2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad \left.+\frac{1}{4\beta^2-9}(6\sin t+\sin 3t-5)\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

コレヨリ

$$
y_\infty=\frac{2\sin 2\beta\pi}{\pi}\left(\frac{\pi}{4(\beta^2-1)}-\frac{1}{4\beta^2-1}-\frac{5}{4\beta^2-9}\right)
$$

又コレヨリ C.C. ノ C_β ヲ計算シテミルト

β	0/18	1/18	2/18	3/18	4/18	5/18	6/18	7/18	8/18	9/18	10/18	11/18
C_β	1	0.987	0.824	0.763	0.717	0.698	0.681	0.655	0.635	0.621	0.611	0.602

12/18	13/18	14/18	15/18	16/18	17/18	18/18
0.594	0.586	0.576	0.564	0.549	0.516	0.5

$\boxed{\text{近似速度}}$ $|\zeta+i|=\rho_1$, $|\zeta-i|=\rho_2$ トオケバ

$\zeta \longrightarrow B, B'$ ノトキハ

(2′) カラ $\quad y[w(\zeta)] = 2\beta \log \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$ $(\rho_2 \to 0)$, $w=\theta+i\tau$

$$\therefore \quad q = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{2\beta} (\rho_2 \to 0) \qquad \therefore \quad q \to 0$$

——— (ツヅク) ———