1016. 代数方程式ニ就イテ

春木　博

Kronecker ノ定理トシテ次ノ著名ナル定理ガアル。

（Kronecker ノ定理）　$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ ニ於テ a_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ハ整数トシ、ソノスベテノ根ノ絶対値ガ1ヨリ大デナイナラバ $f(x)=0$ ノスベテノ根ハ1ノ巾根デアル。

之ヲ應用シテ次ノ定理ヲ証明シヨウ。

（定理）　$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ ニ於テ a_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ ハ整数トシ，且ツ $f(x)=0$ ノ任意ノ根 α ガ

$$|\alpha| \leqq \left[\frac{|a_k|}{\sqrt{n(1+|a_1|^2+\cdots+|a_{k-1}|^2+|a_{k+1}|^2+\cdots+|a_n|^2)}}\right]^{\frac{1}{k}}$$

ナルヤウナ k ガ存在スレバ $f(x)=0$ ノスベテノ根ハ1ノ巾根デアル。

（証明）$$|f(\alpha)| \geqq |a_k||\alpha|^{n-k}-(|\alpha|^n+|a_1||\alpha|^{n-1}+\cdots+|a_{n-k-1}||\alpha|^{k+1}$$

$$+|a_{n-k+1}||\alpha|^{k-1}+\cdots\cdots+|a_n|$$

$$\geqq |a_k||\alpha|^{n-k}$$

$$-\sqrt{1+|a_1|^2+\cdots+|a_{k-1}|^2+|a_{k+1}|^2+\cdots+|a_n|^2}\sqrt{|\alpha|^{2n}+\cdots+|\alpha|^{2(n-k+1)}+|\alpha|^{2(n-k-1)}+\cdots+1}$$

$|\alpha|>1$ トスレバ

$$|f(\alpha)|>|a_k||\alpha|^{n-k}$$

$$-\sqrt{1+|a_1|^2+\cdots+|a_{k-1}|^2+|a_{k+1}|^2+\cdots+|a_n|^2}\sqrt{|\alpha|^{2n}+|\alpha|^{2n}+\cdots\cdots+|\alpha|^{2n}}$$

$$\therefore\ |f(\alpha)|>|a_k||\alpha|^{n-k}$$

$$-\sqrt{n(1+|a_1|^2+\cdots+|a_{k-1}|^2+|a_{k+1}|^2+\cdots+|a_n|^2)}\,|\alpha|^n \geqq 0$$

$$\therefore\ |f(\alpha)|>0$$

之ハ $f(\alpha)=0$ ト矛盾スル。故ニ $|\alpha| \leqq 1$。故ニ Kronecker ノ定理ニヨリ定理ハ証明サレタ。

——（完）——