1014. Vector lattice ノ表現ニツイテ

中山　正（阪大）

Vector lattice 或ヒハ更ニ一般ニ可換束群ノ表現ニツイテハ純代数的ニハ非常ニ満足スベキ結果ガ Lorenzen（ソシテソノヨリ判リ易イ解説トシテ Clifford）ニヨッテ得ラレテヰル（ソノコトハ227号談話983及ビ984ニモ一寸述ベタ[1]）．（勿論純代数的ニモ多クノ問題ガ残サレテヰルガ）．ソシテソノ結果ヲ使フト Vector lattice ノ諸結果，特ニソノ表現ニツイテノ諸定理ニ於テソノ証明ガ簡易化サレルモノガ少クナイ様ニ思ハレル。

サテ、前々号ニ前田－小笠原氏ノ興味アル諸談話ガ出タ（談話998－1000）．ソノ第一ノ表現論（998）ソレハあるきめです的ノ時ニハ中野氏ノ relatives Spectrum（数物記事23－7（昨年））ト大体同ジモノニナルノデハナイカト思ハレマスガ、兎ニ角ソレ等ヲ上述ノ立場カラ見テ見タイト思フ。（本質的ニ大シタ違ヒハナイガ）即チ、一般ノ Vector－lattice ガ Krull－Lorenzen－Clifford ニヨッテ線形順序ヲモツモノデ同型ニ常ニ表現サレテヰルノ

---

1) 談話984ニオケル distributivity ニツイテハ中野氏カラ適切ナ御注意（談話995）ヲイタゞキ難有ク存ジマス．自分デモ気ヅイテ談話989デ述ベテオキマシタ、紙上オ礼申シマス．ナホ、Dedekind ノ証明ハ Werke ノ Bd. 2, XXVIII §6 ニアリマス．

ノダカラ、ソレニ直接 Wallman 式ヲ適用スレバ、同型ヲ犠牲ニシナイデ、兎モ角常ニアル意味デ連続ナアル意味ノ函数(?)デ表現サレルワケデアル. ソノ後ニ特ニ函数ノトル値ヲ実数(又ハ$\pm\infty$)トシテ、ソノ代リ同型ヲ犠牲ニシテ準同型ニスレバ前田—小笠原氏ノ結果ニ相当スル表現ガ得ラレルト思フ、ソシテ σ-complete ノ時ハ中野氏ノ relative spectrum ニナルト思フ. 而シテソレラノ結果ヲ直接出サウト思フ時デモ Lorenzen-Clifford ノ表現ヲ経ルコトハ無駄ナ detour デハナイト思フ。兎ニ角、べくとな束ノ所謂表現論ニオイテ、スベテノ表現ノ母型又ハ原型トシテ Lorenzen-Clifford ノ定理ヲ見ルベキナノデハナカラウカト思フノデスガ如何デセウカ?!

ナホ、序デニ談話 999 ニ於テ小笠原氏ノ述ベテ居ラレル定理「あるきめです的ナラ完備化出来ル」ハ其ノ後ニモ述ベラレテアル如ク中野氏ノ上記数物記事及ビ談話 915 ニアリマスガ、Lorenzen, Clifford ニヨッテモ証明サレテヰル(例ヘバ Clifford, 定理3)(Artin-Krull ノ定理ノ analogy)コトヲ述ベサセテイタダク。

§1. 線型順序ヲモツべくとる束ニツイテ自明ダガ一言スル、線型順序ヲモツべくとる束 L ノ元 a, b ニ於テ任意ノ自然数 n ニ対シテ $|a| < n|b|$ ナルトキ $a \ll b$ デ表ハシ b ノ位(無限大ノ位)ハ a ヨリ高イトデモ云フコトニスル。$a \ll b$ デモ $a \gg b$ デモナイトキ a ト b ハ同ジ位ヲモツトイフ. コノ時ニハ $a=b=0$ デナイトスレバ $b-\xi a \ll a$

（及ビ b）ナル實數 $\xi(\neq 0)$ ガ存在シマタ一意的ニキマル。今 $a>0$ ヲ固定シ，a ヨリ高イ位ノ b ニツイテハ $b \gtrless 0$ ニ應ジテ $\beta=\pm\infty$，a ト同ジ位ノ b ニツイテハ $\beta=$ 上記ノ ξ，a ヨリ低イ位ノ b ニハ $\beta=0$ トスレバ，$b\to\beta$ ニヨッテ L カラ實數及ビ $\pm\infty$ ヘノ對應ガツケラレル．算法ノ順序ガ保存サレル（但シ $\infty-\infty$ 等ニツイテハ何モワカラヌトシテ）嚴密ノ意味デハイケナイガ、カヽル對應ヲモ準同型トヨビ實數（又 $\pm\infty$）ニヨリ表現ト呼バウ（前田—小笠原氏ノ場合ト同様）．

ナホ、カヽル analysis ヲクハシク遂行シテ Hahn ハ線型順序ヲモツ vector lattice 或ヒハ一般ニ可換束群ノ形ヲ完全ニキメテヰルワケダガ、ソノ精細ハ必要トシナイ。

§2. 先ヅ Lorenzen-Clifford ノ定理; L ヲ一ツノ vector lattice トスル（可換束群モ同様ニ扱ヘルガ、簡単ノタメニ）。

$x>0$ ナル元、即チ正元ノアル集合 $\mathfrak{N}$ デ L ノ双對（＝加法的）いでやるナルモノヲ t-いでやるトヨブ（Lorenzen ノ言葉ソノマヽデハ properly = ganz ナ t-いでやるトイフベキダガ簡単ノタメソレヲ略ス）。t-いでやる $\mathfrak{p}$ ニオイテ $a\notin\mathfrak{p}$, $b\notin\mathfrak{p}\to a+b\notin\mathfrak{p}$ ナルトキ $\mathfrak{p}$ ハ素ナリトイフ．最大 t-いでやるハ素デアル。

$\mathfrak{p}$ ガ素ナル t-いでやるナルトキ，$|x|\in\mathfrak{p}$ ナル元，即チ

$x=a-c$ （$a\in$ $c\in$ ≥ 0 デ且ツ $\notin\mathfrak{p}$）

ナル元 x ノ全体ヲ $M_{\mathfrak{z}}$ トス. $M_{\mathfrak{z}}$ ハ Birkhoff ノ言葉デイヘバ normal ナ subspace ヲナシ, 而モ $L/M_{\mathfrak{z}}$ ナル剰餘 vector lattice ハ線形順序ヲモツ. L ノ元 a ノ $L/M_{\mathfrak{z}}$ ニオケル像、即チ $a \bmod M_{\mathfrak{z}}$ ノ類ヲ $a(\mathfrak{z})$ デ表ハス。

今 $\mathfrak{z}$ ガ最大 ℓ-いでやるノ全体ヲウゴクトスレバ

$$a \longrightarrow (\cdots\cdots, a(\mathfrak{z}), \cdots\cdots)$$

ニヨッテ L ガ線形順序ベクトル束 $L/M_{\mathfrak{z}}$ ノ直積ノ中ヘ tron, 即チ同型ニ表現サレル。

§3. カク Lorenzen-Clifford ノ定理ハ L ノ最大 ℓ-いでやる全体 Ω ニ於ケル或ル意味ノ函数（各点デ値ノ属スル Bereich ガコトナリ、マタソレハ単ニ線形ベクトル束デアッテ数デナイ）ニヨリ L ノ同型ノ表現ヲ主張スル。ソコデ Ω ニ適当ニ位相ヲ入レル. Wallman ノ真似ヲスル。

L ニオケル $\geqq 0$ ナル元ノナス部分束ニ於ケル Wallman ノ maximal collection ガ上記最大 ℓ-いでやるニ他ナラナイノダカラ, $a \geqq 0$ ナル a ニツイテ $a \in \mathfrak{z}$ ナル最大 ℓ-いでやる $\mathfrak{z}$ ノ集合、所謂 a-set ヲ開集合ノ基トスレバソレハ同時ニ閉トナリ Ω ガ完全不連結ナ位相空間ニナル。

コノトキ上記 $a(\mathfrak{z})$ ハ次ノ如キ意味デ連続ナ函数(?)デアル、ソノ第一ノ意味：一元 a, 一点 $\mathfrak{z}$ ニ対シ、第二ノ元 b ニツイテ $a(\mathfrak{z}) = b(\mathfrak{z})$ ナリトスレバ $\mathfrak{z}$ ノ適当ナ近傍 U ヲトレバ $q \in U \longrightarrow a(q) = b(q)$ デアル。

〔証明〕 $a \leqq b$ ノ時ニヤレバヨイ。$(a-b)(\mathfrak{p})=0$ ダカラ $a-b \in \mathfrak{p}$. 然ルニ $\mathfrak{p}$ ハ最大イデヤルダカラ $(a-b) \frown p = 0$ ナル $p \in \mathfrak{p}$ ガアル。コノ p-set U ヲ考ヘレバ $U \ni \mathfrak{p}$ デアリ、$U \in \mathfrak{q}$ 即チ $p \in \mathfrak{q}$ ナラ $(a-b) \frown p = 0$ ダカラ $a-b \in \mathfrak{q}$. 故ニ $(a-b)(\mathfrak{q})=0$ デアル. 連續ノ第二ノ意味: 任意ノ $u>0$ （>0 ナルコトハ特ニ本質的デハナイ）ヲトリ、$a(\mathfrak{p}) \gg u(\mathfrak{p})$ ノ時ニハ $\alpha(\mathfrak{p})$ ヲ $a \gtrless 0$ ニ應ジテ $\pm\infty$ トシ，然ラデナイトキニハ

$a(\mathfrak{p})-\alpha(\mathfrak{p})\,u(\mathfrak{p}) \ll u(\mathfrak{p})$ ナル實數 $\alpha(\mathfrak{p})$ ヲ考ヘル（§1. 參照）。シカラバ コノ $\alpha(\mathfrak{p})$ ハ連續函數デアル.

［証明］ $\alpha(\mathfrak{p})=\alpha_0$ が有限ノ時ニハ

$$\{((\alpha_0+\varepsilon)u-a)\cup 0\}\text{-set} \quad ト$$
$$\{(a-(\lambda_0-\varepsilon)u)\cup 0\}\text{-set}$$

ノ共通集合ヲ考ヘレバヨイ。ソコデ $\mathfrak{q}$ ニ対スル $\alpha(\mathfrak{q})$ ハ $\alpha_0+\varepsilon$ ト $\alpha_0-\varepsilon$ ノ間ニアル. $\alpha(\mathfrak{p})=+\infty$ ノトキニハ任意ノ實數 λ ニ對シテ $\{(\lambda u-a)\cup 0\}$-set ノ補集合ナル開集合ヲ考ヘレバヨイ $\alpha(\mathfrak{p})=-\infty$ ノトキモ同樣。

函數ト云フノハ無理ナ変ナ函数デアリ、ムシロ唯表現トイフベキダが、或ル意味デ連續デアリ、トモカク同型デアルノが長所デアラウ。

§3. 上記第二ノ連續性ニ於ケル u ヲ或ルーツノ固定シタ元トスレバ、$a \longrightarrow \alpha(\mathfrak{p})$ ニヨッテ Ω ニ於ケル實數（又ハ $\pm\infty$）値連續函數 $\alpha(\mathfrak{p})$ ニヨッテ L が準同型（例ノ如ク modify シタ意味）ニ表現サレタコトニナル、同型

性ヲ鑛性ニシテ實數（又ハ±∞）値ニシタワケデアル。

特ニ L ニ（Freudenthal 式）單位 e ガアルトシテ $u=e$ トスレバ前田－小笠原氏ノ §1 ノ結果（定理1,2）ニナルワケデアラウ。（実際上記 Ω ノ点ト前田－小笠原氏ノ Ω ノ点ト對應ヅケラレルコトハ容易ニワカル）.（ナホ言葉ニ拘ハル様デ恐縮デスガ、定理1.3ニオイテ L/N ＝ isomorphic ト言ハレテアルノハ言葉ガ一寸不適當デ誤解ヲ招グ恐レガアルノデハナイデセウカ？ソコニモ述ベラレテアル如ク單ニ Kern ガ 0 トイフ意味デ一對一トハ限ラナイワケデスカラ。妄言オ免シ下サイ）. あるきめです的ナラ 0 函數ニ對應スルノハ 0 元ノミノコト明カ. ナホあるきめです的ノ場合ノ精細ハ次§ニ述ベヨウ。

σ－complete ナラ中野氏ノ relatives Spektrum ニナルワケデアラウ。ナホ、ソノ場合 Ω ガ局所びこむぱくとナルコト（中野氏ノ Satz. 1.5）（実ハ局所トイフヨリハ幾分強イびこむぱくと性デアル）モ中野氏ニ於ケル如ク projection ノ可補性カラ Wallman ノモウ一ツノ位相トノ一致カラワカルワケデアルガ、ソレハ多分ソレニ本質的ニ依存スルコトデ、一般ノべくとる束デハ Ω ハ局所びこむぱくとニナルト限ラナイデハナイカト思ハレルガ、トモカク吟味シテ見ナケレバ分ラナイ。

§4. 次ニ前田－小笠原氏ノ§2ニ相當シテあるきめで

す的ノ場合ヲ考ヘヨウ。Lがあるきめです的トハ上記§2ニ於ケル（或ヒハ一般ニ任意ノ線型順序べくとる束ニヨル）同型表現デ，Lノ如何ナル二元 $a, b\ (\neq 0)$ ヲトッテモ、スベテノ $\mathfrak{p}$ ニ対シテ $a(\mathfrak{p}) = b(\mathfrak{p}) = 0$ カ $a(\mathfrak{p}) \gg b(\mathfrak{p})$ トナッテ居ルトイフ様ナコトガナイコトデアル。

以下 L があるきめです的ナリトスル．前田，小笠原氏ノ定理2.2ノ証明ノ精細ハ略サレテアルが、大体 Freudenthal 単位ノアル場合ノ直積ニナホス（大ザッパナ言ヒ方ダが）トイフ方法ハオ借リシテ（Bochner-Phillips, Ann. Math. 42 ヲモ参照）、ヤハリ Krull-Lorenzen-Clifford ノ定理カラ幾分簡易化サレルノデハナイカト思フ。

互ニ fremd（meet ガ 0）ナル正元ノ集合トシテ最大ノモノが確カニ存在スル、ソノ一ツヲ $\{e_\alpha\}$ トスル．最大 t-いである，即チ Ω ノ点 $\mathfrak{p}$ ノ中ニハスベテノ e_α ニ對シテ $e_\alpha(\mathfrak{p}) = 0$ トナルモノモアルカモ知レナイ．今ソレヲ除イテシマッテ残リヲ Ω_1 トスル．然ラバ§2ニ於ケル表現ニ於テ單ニ $\mathfrak{p}$ が Ω_1 ヲウゴクトシテモ表現が同型デアルコトハ保タレル。何トナレバ $a \geqq 0$ デスベテノ $\mathfrak{p} \in \Omega_1$ ニ對シテ $a(\mathfrak{p}) = 0$ ナラバ明カニスベテノ e_α ニ對シテ $e_\alpha \cap a = 0$. $\{e_\alpha\}$ ノ最大性カラ $a = 0$.

ソコデ§2ニ於ケル第二ノ連続性ニ於ケル U トシテ点 $\mathfrak{p}$ ニ於テ $e_\sigma(\mathfrak{p}) > 0$ ナル e_σ（ソレハタダ一ツシカナイ）ヲトル、即チ各点 $\mathfrak{p}$ ニ於テ $e_\sigma(\mathfrak{p}) > 0$ ナル e_σ ヲトリ、$L/M_\mathfrak{p}$

ニオケル e_γ ノ位ニ注目シテ $a(\gamma) \gg e_\sigma(\gamma)$ ナラ $a \gtrless 0$ ニ應ジテ $\alpha(\gamma) = \pm\infty$, 然ウデナケレバ

$$a(\gamma) - \alpha(\gamma)\, e_\sigma(\gamma) \ll e_\sigma(\gamma)$$

トスル、コレニヨッテ

$$a \longrightarrow \alpha(\gamma) \qquad (\gamma \in \Omega_1)$$

ナル Ω_1 デノ実數（又ハ $\pm\infty$）値函數 $\alpha(\gamma)$ ニヨッテ L ガ準同型ニ表現サレタ、コヽニ $\alpha(\gamma)$ ハ連續デアル 何者：各 e_σ-set ハ互ニ fremd ナ開且ツ閉集合デソノ和ガ Ω_1 ダカラ各 e_σ-set ノ中デ連續ナコトヲイヘバヨイ。然ルニソレハ §3 ニ述ベタ場合デアル.（ココマデハあるきめです的ノ假定ハ使ッテヰナイ）、次ニ常ニ $\alpha(\gamma) = 0$ ナル元 a ハ 0 ニカギル. 證明ハ $a \geqq 0$ ノトキスレバヨイ。ソノ様ナ a ニツキ任意ノ e_σ ニ對シテ $b = a \frown e_\sigma$ トオケバ明カニ任意ノ $\gamma \in \Omega_1$ ニ対シテ $b(\gamma) = e_\sigma(\gamma) = 0$ カ $b(\gamma) \ll e_\sigma(\gamma)$ デアル. 故ニ（あるきめです假定ニヨリ）$b = 0$. スベテノ e_σ ニツイテダカラ $a = 0$ デアル.

更ニ、任意ノ a ニツキ $\alpha(\gamma) = \pm\infty$ ナル点ハ nowhere dense デアル. 證明ハ $a > 0$ トシテヨイ. 如何ナル $b > 0$ ニ対シテモ b-set 中ニハ $\alpha(\gamma) =$ 有限ナル $\gamma (\in \Omega_1)$ ガアルコトヲイヘバヨイ、即チ $b(\gamma) > 0$ デ且ツ $e_\sigma(\gamma) > 0$ ナル e_σ ニ對シテ $a(\gamma) \gg e_\sigma(\gamma)$ デナイヤウナ γ ノアル事デアル、假ニコノ様ナ γ ガナケレバ任意ノ e_σ ニ対シテ $b \frown e_\sigma$ ヲ考ヘレバ如何ナル γ ニ対シテモ $(b \frown e_\sigma)(\gamma) = 0$ カ $(b \frown e_\sigma)(\gamma) \ll a(\gamma)$ デアル、然ラバ（あるきめです

假定ニヨリ）$b \frown e_\sigma = 0$．任意ノ e_σ ニ対シテダカラ $b=0$ トナッテ矛盾。

上記二ツノコトニヨッテ我々ノ表現ハ同型デアル。

カクテ完全不連結ナ Ω_1 デノ連續実数（又ハ $\pm\infty$）値函數デ同型ニ表現サレタ。

更ニ前田－小笠原氏ノ場合ニ於ケル如クびこむぱくとヲノゾム時ニハ、例ヘバ Wallman 式ニヨリ Ω_1 ヲびこむぱくとナ Ω_2 ニ imbed スレバヨイデアラウ．Ω_2 モヤハリ完全不連結デアル．Ω_2 ノ点 $\mathfrak{p}$ ハ Ω_1 ノ開集合ノ lattice ノ最大双對いでやるデアル．L ノ元 $a \geqq 0$ ニ対シテ a-set $\in \mathfrak{p}$ ナラバ $a(\mathfrak{p})>0$, a-set $\notin \mathfrak{p}$ ナラ $a(\mathfrak{p})=0$ トオクコトニヨッテ，L ノ元 a ＝ Ω_2 デノ連續（實数又ハ $\pm\infty$ 値）函数ガ得ラレ．ソレガ Ω_1（$\subseteq \Omega_2$）ノ上デハ原ノトー致シ同ジ様ナ性質ヲモツコトハ容易ニ知ラレルデアラウト思フ。

以上本質的ニハ何等変リナク、タゞ同ジコトヲ繰リカヘシタゞケデアリ、ソシテ長々ト書イテ恐縮デシタガ、タゞ Krull-Lorenzen-Clifford ニヨッテ同型ナ表現ガ與ヘラレテヰルノデスカラ、vector lattice ノ諸表現論ニオイテソレヲ原型トシテソレニ依存スルナラ種々ノ点デ簡易化サレルコトガアルノデハナカラウカト思フコトヲ述ベタカッタダケデアリマス。（タゞシコゝニ表現論トイッタノハ無限個ノ元ノ sup, inf ニ関係セズ formulate 出来ルモノノミトシマス、無限個ノ sup, inf 等ノ出来

ル爲ノ（例ヘバ spektral zerlegung 等）デハ同定
理ガ必ズシモ有効ニ利用出来ルトハ限ラナイカト思ヒマス、
利用出来ルコトモアリマセウガ）） 何カ考ヘ違ヒシテヰル点
モアルカト思ヒマス、御教示ヲ願ヒマス。