1012. 整域及ビべくとる束ニ関スル

Krull ノ豫想ニツイテ II

中 山 正（阪大）

Krull ハ「vollstandig ganz-abgeschlossen ナ整域ハ常ニ speziell ナ（即チ普通ノ実数ノ値ヲトル）賦値ノ Bewertungsringe ノ durchschnitt ニナルデアラウ」コトヲ予想シテ居マス。（Crelle 167 (1932), P. 110 及ビ Math. Zeitschr. 41 (1936) P. 666; Lorenzen, Math. Zeitschr. 45 (1935) §5 ヲモ参照）．ソノ束群的或ヒハべくとる束的解釈（幾分強イ主張トシテ）「あるきめです的束群（或ヒハべくとる束）ハ（有限）実数値函数ガ問題ニ表現サレルデアラウ」コトガ問題ニサレテヰル。（上記 Lorenzen 及ビ Clifford, Ann. Math. 41 (1940) ノ最後ヲ参照）

処ガ、コノ束群的解釈ノ方ハ否定的ニ解決サレル様ニ思フ。即チ反例ガ與ヘラレルヤウニ思フ。整域ノ方ニツイテモ大体反例ガ與ヘラレテ否定的ニ答ヘラレルヤウニ思フノデスガ、未ダ充分吟味シテナイ点ガアリマスノデ，ソレニツイテハ第 III デ述ベルコトニシテ今ハ束群ニ限ルコトニシマス）。

反例ハ前々号ニ前田、小笠原氏ノべくとる束ニツイテノ興味アル談話ガ出マシタガ、ソノ第二ノモノ、小笠原氏ノ談話 999 ニオケル結果[1]ヲ使フノデアリマス。ソノ小笠原氏ノ構成ノ中ニ「sehr tief zu liegen」ナコトガアルノデセウコトハ勿論デスガ、ソレニシテモ「working on this problem for the past year, with

---

(1) 吉田サンモ曾テソレト非常ニ近イコトヲヤッテ居ラレタ。ぴたごらす環ノトキニ。

no success whatever」サレタ問題ガ以下ノ様ニ割ニ簡単(2)ニ否定サレルノハ少々変デアリ、マタ小生ノ全ク不案内ナ事柄ニ関シテデスカラ、半信半疑 イサヽカ自信ガナイノデスガ、トモカク御報告シマス。

先ヅAヲcomplete ナ Boolean algebra トシ、Ωヲソノ表現空間トスル。即チAノ最大双對いであるノ集合ニStone-Wallmanノ位相ヲ入レタモノ。ソレハ勿論完全不連結びーむぱくとだが、更ニ小笠原氏ハΩノ上ノ(實数又ハ$\pm\infty$ヲトル)連続函数デnowhere denseナ集合ヲ除イテハ有限ナルモノノ全体$\mathcal{L}$ハ一ツノcompleteナ(従ツテ勿論あるきめです的ナ)べくとる束ヲナスコトヲ証明セラレタ。

ソノ場合ニ函数ノ「和」ガ先ヅ問題ニナルワケダガ、ソレヲ小笠原氏ハ両函数ノ有限ナル点ニオイテハ丁度各ノ値ノ和ニナル様ナ(B−可測ナ)函数ヲ考ヘテ、ソレト對等(第一種集合ヲノゾイテ一致スル事)ナル連続函数トシテ和ヲ定義シテ居ラレル。

サテ上記ノ如キA, Ω, ソレカラ作ツタ$\mathcal{L}$ガAガ適當ナ条件ヲミタス時ニ上記ノ予想ノ反例ニナッテヰルコトヲ云フノデアリマスガ、ソレニハAヲ適當ニトッテ

(※) Ωノ任意ノ点pニ対シテ、ソコデ実際ニ$+\infty$ニ

---

2) 整域ニツイテハコタ少シ複雑デアリマス。

ナル様ナ $\mathfrak{L}$ ノ元 f ガアル（$f(\mathfrak{z})=+\infty$）様ニ出来ルコトヲ言ヒマス。今假ニAヲ適當ニトッテ、コノ様ニナッテヰルモノガ既ニ出来タト假定シマス。ソウスレバ次ノ様ニヤレバヨイ：

$\mathfrak{S}$ ノ点 $\mathfrak{z}$ ニ對シテ，$f(\mathfrak{z})=$ 有限ナル $f\in\mathfrak{L}$ ヲ考ヘルト、ソノ全体ハ $\mathfrak{L}$ ニオケル一ツノ normal subspace $\mathfrak{N}_{\mathfrak{z}}$ ヲナス。（上ノ小笠原氏ノ構成カラ容易ニワカル如クニ函数ガ有限ナル点 $\mathfrak{z}$ デハ　ソノ「和」ノ値ハ丁度値ノ和ナル有限値ニナッテヰル）。シカルニ上記假定ニヨリ、$\mathfrak{L}$ ニハ $\mathfrak{z}$ デ ∞ ニナル元ガ実際ニアルノダカラ $\mathfrak{N}_{\mathfrak{z}}$ ハ $\mathfrak{L}$ ニハ一致セズ，即チ proper ナ normal subspace デアル。

サテ、$\mathfrak{S}$ ノスベテノ点デ有限ナル函数ノ全体ハ明カニ $\bigcap_{\mathfrak{z}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{z}}$ デアリ、コレヲ例ヘバ $\mathfrak{N}$ トオク。

然ルトキ，$\mathfrak{L}$ ノ任意ノ最大 normal subspace $\mathfrak{M}$ ニ対シテ $\mathfrak{M}\supseteq\mathfrak{N}$ ナルコトヲイウ。コレガ云ヘレバヨイ。

何故ナラ、$\mathfrak{L}$ カラ（有限ノ）実数ヘノ準同型トハ $\mathfrak{L}$ ヲアル最大 normal subspace デ剰餘ヲトルコトデアリ、従ッテソノ際 $\mathfrak{N}$ ノ元ハ常ニ 0 ニナル。即チ $\mathfrak{L}$ ハ（有限）実数ノ函数デハ決シテ同型ニ表現サレナイ。

$\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{L}$ ノ任意ノ最大 normal subspace トスル。ソノ時

i) 一点 $\mathfrak{z}$ ガアッテ $\mathfrak{N}_{\mathfrak{z}}\supseteq\mathfrak{M}$

ii) $\mathfrak{N}_\mathfrak{z} \supseteq \mathfrak{M}$ ナル $\mathfrak{z} \in \Omega$ ハ存在シナイ。

トイフ二ツノ場合ガ考ヘラレル。

先ヅ i) ノトキニハ $\mathfrak{N}_\mathfrak{z} = \mathfrak{M}$ （$\mathfrak{M}$ ハ最大ダカラ）。故ニ $\mathfrak{M} \supseteq \bigcap \mathfrak{N}_\mathfrak{z} = \mathfrak{N}$ デヨイ。

ii) ノ時ニハ各 $\mathfrak{z} \in \Omega$ ニ対シテ $f_\mathfrak{z}(\mathfrak{z}) = +\infty$ ナル $f_\mathfrak{z} \in \mathfrak{M}$ ガアル（$f_\mathfrak{z} > 0$ デアルトシテヨイ）. $f_\mathfrak{z}$ ハ連続ダカラ $\mathfrak{z}$ ノ適当ナ近傍 $U_\mathfrak{z}$ ヲトレバ $\mathfrak{q} \in U_\mathfrak{z} \to f_\mathfrak{z}(\mathfrak{q}) \geqq \alpha$ （α ハアルキマッタ正数）. Ω ハびこむぱくとダカラ，有限個ノ $U_\mathfrak{z}$，タトヘバ $U_{\mathfrak{z}_1}, U_{\mathfrak{z}_2}, \cdots\cdots, U_{\mathfrak{z}_n}$ デオヽヘル. $F = f_{\mathfrak{z}_1} + f_{\mathfrak{z}_2} + \cdots\cdots + f_{\mathfrak{z}_n}$（$\mathfrak{L}$ ニオケル意味ノ和ナルコト勿論）ヲ考ヘル。

$F \in \mathfrak{M}$.

然ラバ F ハ Ω ノスベテノ点デ $\geqq \alpha$ ナルコトハ明カデアル.（和ノ定義参照）。故ニ如何ナル有限（従ッテ有界ナ）$g \in \mathfrak{L}$ ニ対シテモ $|g| \leqq nF$ ナル n ガアリ. $g \in \mathfrak{M}$ トナル. 故ニ $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{M}$ デアル。

ヨッテ主張ガ証明サレタ。（註：実ハ勿論 i) ノ場合ハナイノデアル. 何トナラバ、$\mathfrak{N}_\mathfrak{z}$ ハ決シテ最大 normal subspace ニナラナイ. ソレハ $\mathfrak{N}_\mathfrak{z}$ トアル $f(\mathfrak{z}) = \pm\infty$ ナル f デ生成サレタ normal subspace ハ $\mathfrak{z}$ デ f ヨリ高イ order デ ∞ ニナル函数，例ヘバ f^2 ヲ含マナイカラ $\mathfrak{L}$ トー致シナイノデアル. コノ事ヲ先ニイッテ i), ii) ナドトイハナイ方ガコカッタデアラウ）。

残ルノハ A ヲ適当ニトッテ，$\mathfrak{L}$ ガ上記ノ條件(※)ヲ

ミタス様ニスレバヨイ。（ソレニハ例ヘバAがatomヲモッテヰタリシテハイケナイ。ソノ元ニ対應スルΩノ点ハ自身open setデソコデ∞ニナル$\mathcal{L}$ノ元ナドナイ）。
ソコデ，Aトシテ

complete ナBoolean algebraデ，ソノ中ニ可附番個ノatomデナイ元$v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n, \cdots\cdots$（イヅレモ$>0$）がアッテ，而シテ任意ノ$a\ (>0)$ニAニ對シテ$a \geqq v_i$ナル$v_i$ガアル様ニナッテヰルトスル。例ヘバコノ様ナAトシテハ$(0, 1)$ニオケルopen sets mod. nowhere dense setsノナスBoolean algebraヲトレバヨイデアラウ。[(2)]（Birkhoffノ本101—102頁参照）。

Aがコノ様ナ$\{v_n\}$ヲモットスル。然ラバΩノ任意ノ一点，スナハチAノ最大双對いでやる$\mathfrak{F}$ニ對シテ，$\mathfrak{F}$中ニ可附番個ノ単調減少列$w_1 > w_2 > \cdots\cdots > w_n > \cdots\cdots$デ$\inf. w_n = 0$ナルモノがアル。ソレハ明カデアル。

何トナラバ$\mathfrak{F} = \{w\}$トスレバ確カニ$\inf. w = 0$デアル（$\inf. w > 0$ナラ$\mathfrak{F}$ハ最大双對いでやるデアリ得ナイ；Aノ元ハイヅレモatomデナイ）カラ，w_1ヲ$w_1 \not\geqq v_1$ナル如クトリ，w_2ヲ$w_1 > w_2$デ且ツ$w_2 \not\geqq v_2$

---

(2) 例ヘバ有理数ヲ端ニモツ開區間ヲ$v_1, v_2, \cdots\cdots$トスレバヨイ。

ナル如クトリ，‥‥シテ行ケバヨイ。

扨テ $\mathfrak{z}$ ヲ Ω ノ点ト見レバ，$\mathfrak{z}$ ハ w-set ($w \in \mathfrak{z}$) ニフクマレ、而シテ $\bigcap$ (w_n-set) ヲ $\mathfrak{z}$ デアル．コヽニ w_i-set ハ開且ツ閉デアル。ソノ intersection ハ閉集合デアルガ、nowhere dense デアル。ナゼナラ，ソウデナケレバアル開集合ヲ，従ツテアル a-set ($a>0$) ヲフクミ，然ラバ w_n-set $\supseteq$ a-set 即チ $w_n \geqq a$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) トナッテ矛盾。

即チ w_1-set $\supset$ w_2-set $\supset \cdots\cdots \supset$ w_n-set $\supset \cdots\cdots$ ナル開且ツ閉ナル集合 w_n-set ノ単調列ガエラレテ，ソノ intersection ハ nowhere dense set ($\ni \mathfrak{z}$) デアル．ヨツテ $f(\mathfrak{q})$ ヲ

$\mathfrak{q} \notin w_1$-set ナラ $f(\mathfrak{q})=0$

$\mathfrak{q} \in (w_n$-set$)-(w_{n+1}$-set$)$ ナラ $f(\mathfrak{q})=n$

$\mathfrak{q} \in w_n$-set ($n=1,2,\cdots\cdots$) ナラ $f(\mathfrak{q})=+\infty$

トスレバ，コレハ連続函数デアリ（w_i-set ハミナ開且ツ閉ナルコトニ注意），$\mathfrak{L}$ ニ属シ，$\mathfrak{z}$ デ $+\infty$ デアル．

$\mathfrak{z}$ ハ Ω ノ任意ノ一点ダカラ，コレデ（米）ナル $\mathfrak{L}$ ガ出来タワケデアル。

コレデ束群ノ場合ノ予想ノ反例ガ出来タ様デアル．整域ニツイテハ次回ニ論ジマス。

以上何カ間違ヒガアルカモ知レズ、マタ自分ガ知ラナイダケデ自明ナコトヲ長々ト書イタリシタ個所モアル様ニ思ヒマスガ、何ダカコレデ良ササウニ思フノデスガ？！ 御教示

ヲ願ヒマス。