1011 *Lattice ordered ring* ノ可換性ニツイテ

小笠原 藤次郎（廣文理大）

實數体ヲ作用閾トスル "ring lattice"[1] カラコノ作用圏存在ノ假定ヲ取除イタモノヲ *lattice ordered ring*

---

(1) 小笠原藤次郎 "ring lattice ニツイテ"（紙上數學談話會）以下 "ring lattice" トシテ引用。

ト呼ブコトニスル。(丁度 vector lattice ト lattice ordered group トノ關係ニ於テ見ラレル樣ニ). Archimedean ノ場合ニ可換環トナルコトヲ證明スルノガ目的デアル. 先ヅ我々ノ"表現論"[2]ハ實數体デナク有理數体ヲ作用域トスル場合ニモ成立スルコトヲ注意スル. コレハ我々ノ方法ノ本質的ナ部分即チ characteristic family ヲ用フル際ニ有理數ニ對スルモノノミヲ考ヘレバヨイコトカラ分ル. §1 デハ lattice ordered abelian group ハ常ニ有理數体ヲ作用域トスルモノニ擴大サレル. 從ッテ連續函數ニヨル表現ノ問題解決ガ可能トナルコト, §2 デハ lattice ordered ring ノ定義及ビ茲ニ於テ, 目的デアル可換性ノ證明ヲノベル。

§1. L ヲ a, b ヲ要素トスル lattice ordered abelian group トスル。$m, n, p, q, \cdots\cdots$ ヲ自然數トシ $(\frac{1}{n}, a)$ ナル自然數ト L ノ要素ヨリナル對ノ全体ヲ L^* デ表シ $nb = ma$ ノトキ $(\frac{1}{n}, a)$ ト $(\frac{1}{m}, b)$ ヲ恒等視シ和及ビ正要素ヲ次ノ樣ニ定義シテ lattice ordered group ニスル. 先ヅ上ノ恒等ノ定義ガ對等關係ニ基クコトハ lattice ordered group ニ於テ常ニ $n(a \vee b) = na \vee nb$ ノ成立スルコトカラ分ル。

$(\frac{1}{n}, a)+(\frac{1}{m}, b)=(\frac{1}{nm}, nb+ma)$ ト置ク. コレニ

---

(2) 前田文友, 小笠原藤次郎 "vector lattice ノ表現" (紙上數學談話會) 以下"表現論"トシテ引用。

ヨッテ abel 群トナリ $-(\frac{1}{n}, a) = (\frac{1}{n}, -a)$ トナル。
$\frac{q}{p}(\frac{1}{n}, a) = (\frac{1}{np}, qa)$ ト置クコトニ依ッテ有理数体ヲ作用圏トスル abel 群トナル．次ニ $a \geqq 0$ ノトキ $(\frac{1}{n}, a) \geqq 0$ ト定メルコトニヨリ lattice ordered group トナル．
a ニ $(1, a)$ ヲ對應サセルコトニヨッテ L ハ L^* ノ内ニ埋藏サレルコト且ツコノ過程ニヨッテ次ノ様ナ L ノ性質ハ保存サレル：無制限ナ join, meet; lattice 論的單位; Archimedes ノ公理等．今後 $(\frac{1}{n}, a)$ ノ代リニ $\frac{1}{n}a$ ト書クコトニスル．コノコトカラ次ノ事ガワカル．

(i) lattice 單位 e ガ存在シテ各要素ガ e ニ關シテ有界ノトキハ e ニ関シテ無限小要素ノ全体ハ群ヲ作リコレニヨル L ノ差群ハ Archimedean lattice ordered group トナル。

(ii) L ガ Archimedean ノ場合ハ L ノ normal ideal ノ全体ハ complete Boolean algebra ヲ作リソノ表現 Boolean space ヲ考ヘルナラバ L ハコノ空間ノ連續函数族デ表現サレル．特ニ lattice 單位 e ヲ有スル場合ニハ e ガ恒等的ニ 1 トナル如クスルコトガ出来ル．之等ノ考ヘ方カラ lattice ordered group ノ表現ニ關スル Stone ノ定理 (Proc. Nat. Acad. Sci. 27 (1941)) 及ビソノ拡張ガ得ラレル。

§2. 環單位 e ヲモツ次ノ諸條件ヲ満足スル環ヲ lattice ordered ring トイフ．

(1) Archimedean lattice ordered group

デアル。

(2) 環単位 e ハ lattice 論的単位デアル。

(3) $a, b>0$ ノトキ $ab \geqq 0$

コレニツイテ次ノ定理ガ成立スル。

定理 lattice ordered ring ハ常ニ可換環デアル，且積ハ単独的ニ定マル。

(證) R ヲ問題ノ環トシ §1 ノ方法ニヨッテ有理数体ヲ作用團トスル Archimedean lattice ordered ring ニスル．コレニハ $\left(\frac{1}{n}, a\right)\left(\frac{1}{m}, b\right)=\left(\frac{1}{nm}, ab\right)$ ト定メルコトヲ注意スレバ分ルコトヽ思フ。

次ニコレヲ実数体ヲ作用團トスルモノニ拡大スル．(コノ拡大ノ方法モ周知ノコトヽ思フカラ述ベナイ) 斯クノ如クシテ R ヲ "ring lattice" ニ埋藏スルコトガ可能トナッタ．コノ最後ノ "ring lattice" ハ常ニ可換デアルコトハ既ニ証明シタ。定理ノ後半ハ表現 Boole 空間ノ連続函数ノ積ニ表現サレルコトカラ分ル。

定理 lattice ordered ring ハ単独的ニ定マル bicompact 空間ノ連続函数ニヨッテ表現サレ和ニハ和，積ニハ積ガ對應スル。

(證) 前定理ノ最後ノ部分ノ注意カラ。

次ニ各要素ガ e ニ関シテ有界ノトキハ環ノ積ノ結合則ハ假定シナクテモ (1), (2), (3) ノ性質カラ結果スルコトハ "ring lattice" ノ証明カラ分ル．一般ノ場合ニ之レ以上ノ假定ヲ置カナイデ同様ノコトガ成立スルモノト考ヘラレ

ルガ未ダ証明ガ出来ナイ。（尤モ應用ニ屡々表ハレル regular ノ場合ニハソノ成立ガ分ルカラ（"ring lattice" ノ証明カラノ分自由ハナイト思フガ）。

（訂正）小笠原藤次郎 "Boolean space ニツイテ"（紙上数学談話會），「定理、無制限ニ L ノ join, meet ヲ保存スルヤウナ L ヲ含ム最小ノ complete vector lattice $\overline{L}$ ガ存在スル，$\overline{L}$ ハ何レモ $\overline{\mathcal{L}}$ ニ linear-lattice-isomorphic デアル」ノ証明ニ於テ $\overline{L}$ ノ説明中 "L ニヨツテ majorize サレル要素ノ全体" ハ "L ノ要素ノ切断トシテ表サレル要素ノ全体" ニ改メル。尚コノ定理ハ Clifford ノ（Annals of Math）定理3ニ對應スルモノデアルコトガ分ッタ。