1005. 作用素ノ解析的表現トソノ應用

小笠原 藤次郎(廣文理大)

L. Kantorovitch: Linear operations in semi-ordered spaces. I. Recueil Math 7(1940) 209−284 ノ定理16ノ一般化及ビソノ簡單ナ應用ヲ示ス。記法, 定義等ハ大体ニ於テコノ論文ニ從フコトニシタ。

§1. Sヲbicompact Hausdorff space, C及ビMヲソノ上ノ連續函數空間及ビ有界B−可測函数ノvector latticeトスル. YヲKantorovitchノK_b型空間トスルトキ次ノ定理ガ成立スル。

定理1. CヲYニ移ス加法的作用素ニツイテ$H_r = H_b^0$ガ成立シ, $U \in H_r = H_b^0$ノ特性トシテYヲ値域トスルBorel集合族上ノ(o)−有界完全加法的測度$m(E)$ガ定マリ$x(p) \in C$ニ對シテ

$$U_x = \int_S x(p)\, m(dE), \quad (\operatorname{var} m)(S) = |U|$$

ガ成立スル。從ッテ任意ノ$U \in H_r = H_b^0$ハMカラYヘノH_c^0ノ作用素ニ擴大サレル。

(證) Uヲ正, 負ノ二部分ニ分ケソノ各ニツイテ定理ノ表現式ヲ證明スレバヨイ. 證明ニツイテA. Markoff, Recueil Math. 4(1938) 168−190ヲ殆ンド文字通リ移シテ得ラレルガ茲デハvector latticeノ表現論

ノ使ッテモ証明サレルコトヲ示ス。ソノ準備トシテ二三ノ補助定理カラ始メル。

補助定理1. Boole空間ノ basic open sets（開且ツ閉集合ノ意味）ノ集合族上デノ K_σ 型空間ヲ値域トスル正値加法的集合函数ハ Borel族上正則ナ正値完全加法的集合函数ニ拡大サレル。

（証） 値域ガ実数空間ノ場合ト大差ナシ。完全加法的ノ証明ニ K_σ 型空間ノ一性質ヲ使用スル。Hopfノ拡大定理ナドモ値域モ K_σ 型空間トシテモ成立スルコトヲ注意スル。

補助定理2. Archimedean vector lattice X 上ノ complete vector lattice ヲ値域トスル正ノ同次加法的函数ハコノ性質ヲ変ヘナイデ X ヲ含ム最小ノ complete vector lattice 上ノ函数ニ拡大サレル。

（証） コノ補助定理ヲ少シ一般ニシタモノヽ, Hahn-Banach ノ定理ニ對應スルモノ等スベテ Banach ノ本, 27−29頁ノ考ヘ方ニ従ッテ証明サレル。

コレカラ本定理ノ証明ニ入ル。C ヲ vector lattice ト考ヘテ C ノスベテノ normal ideal ノ全体ノ作ル complete Boolean algebra ノ表現Boole空間ヲ Ω トスル。（前田文友, 小笠原藤次郎, vector lattice ノ表現. 小笠原藤次郎, Boole空間ニツイテ —— 紙上談話會 —— ノ記法, 定義等断リナシニ使フ）。

Ω 上ノ有界連続函数ハ C ヲ含ム最小ノ complete vector lattice デアル。U ヲ正トシテ U ヲ補助定理2ニ依ッ

ヲ拡大シタモノヲ U_Ω トスル. basic open sets O_α ノ特性函數ヲ e_α トシテ $\mu(O_\alpha) = U_\Omega(e_\alpha)$ トオク。
補助定理1ニ依ッテ $\mu(O_\alpha)$ ヲ Ω ノスベテノ Borel 集合ノ上へ拡大スル。S ハ Ω ヲ C ニ依ッテ reduce シタモノデアルカラ S. Borel 集合 E ニハ Ω ノ Borel 集合 E^* ガ對應スルモノトス. x ニ對應スル Ω ノ連續函數ヲ $f_x(\zeta^*)$ トスルトキ
$m(E) = \mu(E^*)$ トオイテ

$$\int_S x(p)\, m(dE) = \int_\Omega f_x(\zeta^*)\, \mu(dE^*) = U_\Omega x = Ux$$

ガ証明サレル. 定理ノ殘リノ部分ノ証明ハコレカラ直グ出來ル。

§2. 定理1ノ簡單ナ應用ヲノベル。X ヲ Banach 空間, $Y \in K_b$ トスル。$U \in H_b^0$ ヲ考ヘル。X ノ共軛空間 $\overline{X}$ ノ單位球ヲ S トス. S ハ X ノ要素ニヨル弱位相化ニヨッテ bi-compact Hausdorff 空間トナル。

U ハ S ノ連續函數ノ空間ノ部分空間カラ Y ヘノ H_b^0 ノ作用素トナル。S 上ノ任意ノ連續函數ヲ $\varphi(f)$ トシ $p(\varphi) = |U|\|\varphi\|$ ト置イテ Hahn-Banach ノ拡大定理ニヨッテ U ヲ S 上ノスベテノ連續函數ノ作ル空間 C ヲ Y ヘ移ス H_b^0 ノ作用素ニ拡大サレルカラ前定理1ニ依ッテ任意ノ $x \in X$ ニ對シテ

$$Ux = \int_S x(f)\, m(dE), \quad (\mathrm{var}\, m)(S) = |U|$$

ト書カレル. x_n ガ x ニ弱收斂スルトキ $U'x_n$ ハ $U_x=(0)$ ニ收斂スル. 從ッテ X ガ locally weakly compact Y ガ B_2 又ハ R_2 型空間ノトキ $U\in H_b^0$ ハ完全連續作用素トナル. 又 X=Y=L 空間ノ樣ナトキハ, カヽル作用素ヲ二回重ネタモノガ完全連續作用素ニナル（吉田, 三村, 角谷, 學士院記事, 14(1938)359−362)

コレハL空間デハ區間ガ locally weakly compact トナルコトニナル. Hilbert 空間 $L_2(S)$ デハ H_b^0 ノ作用素ノ finite norm ノ作用素, $\iint K(\alpha,\beta)^2 d\alpha d\beta < +\infty$ ナル可測核ヲモツ積分作用素ハ一致スル. コレハ Vulich; Annals of Math. 38(1937) 156−174 デ特殊ノ場合ニ證明シテヰルガ次回ニ一般ノ場合ノ證明ヲ行フ。

（注意） 以上ハ實係數ノ線形空間ノ場合ヲノベタガ複素係數ノ場合ニハ適當ナ定義ト修正ニ依ッテ以上ノ結果ヲコノ場合ニ拡ゲルコトガ出来ル。コレニハ Hahn-Banach ノ定理ノ複素係數空間ヘノ拡張ヲ必要トスル。trivial ナ事ト考ヘルカラ茲デハ述ベナイ。