1001. 一ツノ函數方程式ニ就キテ

春木　　博（神戸高等商業學校）

$f(x)=\sin x$ ハ明カニ函數方程式

$$(1)\quad f(-x+y+z)+f(x-y+z)+f(x+y-z)-f(x+y+z)=4f(x)f(y)f(z)$$

ヲ満足セシメル。逆ニ(1)ヲ満足セシメル可測函數 $f(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

(1)ニ於テ $x=y=0$ トオケバ　$(f(0)=C)$

$$C=2C^3$$

故ニ，$C=0$ 或ハ $C=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$C=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキハ(1)ニ於テ $y=z=0$ トオケバ

$$f(-x)+f(x)=2f(x)$$

$$\therefore\quad f(x)=f(-x)$$

即チ $f(x)$ ハ偶函數デアル。

(1)ニ於テ、$z=0$ トオケバ

$$f(-x+y)+f(x-y)=2\sqrt{2}\,f(x)f(y)$$

偶函數ナル故　$f(-x+y)=f(x-y)$ ナル故

$$f(x-y)=\sqrt{2}\,f(x)f(y)$$

y ノ代リニ $-y$ トオケバ $f(x)$ ハ偶函數ナル故

$$f(x+y)=\sqrt{2}\,f(x)f(y)$$

之ヨリ　$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\alpha x}$　（α ハ任意ノ實數）

$f(x)$ ハ偶函數ナル故　$\alpha=0$

即チ　$f(x)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

同様ニシテ $C=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ノトキモ　$f(x)\equiv-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ得ル

$C=0$ ナルトキハ (1) ニ於テ $y=z=0$ トオクコトニヨリ

$$f(-x)+f(x)=0$$

即チ $f(x)$ ハ奇函數ナルコトガ判ル。

(1) ニ於テ $z=y$ トオケバ

$$f(-x+2y)-f(x+2y)=2f(x)\left[2f^2(y)-1\right]$$

$f(x)$ ガ奇函數ナル故

$$f(x+2y)+f(x-2y)=2f(x)\left[1-2f^2(y)\right]$$

y ノ代リニ $\dfrac{y}{2}$ トオキ，$\varphi(y)=1-2f^2\left(\dfrac{y}{2}\right)$ トスレバ

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\varphi(y)$$

$f(x)$ ハ可測ナル故、之レヨリ $\alpha,\beta\ \gamma$ ヲ任意ノ實數トスルトキ

$$f(x)=\beta\sin\alpha x+\gamma\cos\alpha x,$$

$$f(x)=\beta\sinh\alpha x+\gamma\cosh\alpha x,$$

$$f(x)=\alpha x+\beta$$

$f(0)=0$ ナル故

$$f(x)=\beta\sin\alpha x,\quad f(x)=\beta\sinh\alpha x,$$

$$f(x)=\alpha x$$

之ヨリ，(1) ニ適スルモノヲ求ムレバ，結局、α ヲ任意ノ實數トスルトキ，求ムル $f(x)$ ハ

$$f(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f(x) \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(x) = \sin \alpha x, \quad f(x) = \sinh \alpha x$$

——（完）——