999. Boole 空間ニツイテ

小笠原藤次郎（廣島文理大）

vector lattice ノ"表現論"[1] ヘノ補足ト並ビニ，ソノ作用素論等ヘノ應用ヲ可能ニスル足場ヲ作ルコトガ目的デアル。"表現論"ガ Archimedean ノ場合ニ於テモ complete ノ場合ト本質的ニ大差ナク成立スル根據ハ何カ。コレヲ前田先生ノ表現法ヲモトニシテ明確ニスルタメ §1, §3 デ Stone ノ着想[2] ヲ補ッテ Boole 空間トソノ上ノ

---

(1) 前田文友，小笠原藤次郎，vector lattice ノ表現。以後コノ論文ヲ"表現論"ト呼ブ。

(2) Stone, Proc. Nat. Acad. Sci. 26 (1940), 280−283

連續函數ノ vector lattice トノ関係ヲ調ベ§2デハ上記問題ノ解答トシテ Archimedean vector lattice ハ無制限ニ join, meet ヲ保存シテ complete vector lattice ニ埋藏サレル[3] コトヲ示ス。§4デハ前田先生ノ measure ノ補足§5デハ"表現論"ヘノ簡單ナ補足ヲ加ヘタ。應用ニツイテハ本誌デ間モナク論ズルコトニスル。

§1. 定理1.1. Ω ヲ Boole 代數 A ノ表現 Boole 空間トスルトキ次ノ諸條件ハ互ニ~~對等~~デアル。

(1°) A ハ complete デアル。

(2°) Ω ノ任意ノ Borel 集合ハ第一種集合ヲ法トシテ Ω ノ basic open set[4] ト一致スル。

(3°) Ω 上ノ任意ノ B-可測 (Borel 可測ノコト) 有界函數ハ第一種集合上ヲ除イテ連続函數ト一致スル。

(4°) 第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトル Ω 上ノ任意ノ B-可測函數ハ非稠密集合ヲ除イテ有限値ヲトル連續函數ト第一種集合ヲ除イテ一致スル。

(証) basis open set ハ O 或ハ O_α, 開集合ハ G, Borel 集合ハ B 或ハ B_α, 第一種集合ハ P 或ハ P_α 等デ表ス.

(1°) ⟶ (2°) ノ証. $\mathfrak{M}$ ヲ $O \triangle P$ (O ト P ノ對稱差) ノ形ヲモツ集合ノ族トシ次ノ (i), (ii), (iii) が成立スルコトヲ示セバ可ナリ。

(i) $E \in \mathfrak{M}$ ノトキ $E^c \in \mathfrak{M}$ (ii) $E_n \in \mathfrak{M}$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ノ

(3) 中野秀五郎, 紙上談話會. 1941, 915

(4) 開且閉集合ノコト.

トキ $\sum E_n \in \mathfrak{M}$ 　(iii) $G \in \mathfrak{M}$. コノウチ (i), (iii) ハ自明 (ii) ハ $E_n = O_n \triangle P_n$ ヨリ $\sum E_n \triangle \sum P_n \subseteq \sum P_n$ カラ明.

(2°) → (3°) ノ証. $f(p)$ ヲ有界-B-可測トシ $E_\alpha = [f(p) < \alpha]$ (α ハ有理数) ト置ク。假定ヨリ $E_\alpha = O_\alpha \triangle P_\alpha$ ガ成立, コレヨリ $\alpha < \beta$ ノトキ $O_\alpha \subset O_\beta$ ガ成立スル。連續函數 $h(p)$ ヲ次ノ如ク定メル。

$$h(p) = g.l.b.\{\alpha;\ p \in O_\alpha\} = l.u.b.\{\alpha;\ p \notin O_\alpha\}$$

コノ $h(p)$ ガ問題ノ連續函數ナルコトガ容易ニ示サレル。

(2°) → (4°) ノ証　(2°) → (3°) ノ証ニ準ズル。

(4°) → (3°) ノ証　自明.

(3°) → (1°) ノ証　α ヲ任意ノ index ノ集合ノ要素トスル。$f_\alpha(p)$ ヲ O_α ノ特性函數トシ $f(p) = l.u.b._\alpha f_\alpha(p)$ ト置イテ (3°) ニヨッテ $f(p)$ ニ對應スル連續函數ヲ $h(p)$ トスレバ $h(p)$ ハ $\overline{\sum O_\alpha}$ ノ特性函數トナルコトガ示サレル。コレカラ (1°) ノ成立ガ明トナル。

定義　定理 1.1 ノ証明中ノ $\mathfrak{M}$ ノ集合ヲ單ニ可測集合, $\mathfrak{M}$ ニ関シテ可測ナ函數ヲ單ニ可測函數ト呼ブ。

定義　第一種集合上ヲ除イテ一致スル函數ハ對等ナリトイフ。

以下 Ω 上ノ函數ハ第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトルモノトスル。

定理 1.2　Ω ヲ Boole 代數 A ノ表現 Boole 空間トスル。A ヲ complete トスルトキ次ノ條件ハ互ニ對等デアル。

(1°) $f(p)$ ハ Ω 上ノ可測函數デアル。

(2°) $f(p)$ ハ Baire ノ性質ヲモツ。

(3°) $f(p)$ ハ連續函數ト對等デアル。

(證) 定理1.1ノ證明カラ自明。

定理1.3 Ω ヲ bicompact Hausdorff 空間トシ，ソノ上ノ有界連續函數族ヲ $\mathcal{L}_b$，非稠密集合ヲ除イテ有限値ヲトル連續函數族ヲ $\mathcal{L}_\Omega$ トスル．コノトキ次ノ諸條件ハ互ニ對等デアル。

(1°) Ω ハ complete Boolean algebra ノ表現 Boole 空間デアル。

(2°) $\mathcal{L}_b$ ハ complete vector lattice デアル。

(3°) $\mathcal{L}_\Omega$ ハ complete vector lattice デアル。

〔注意〕 (3°)ニ於テハ $\mathcal{L}_\Omega$ ノ函數ノ和ハ有限値ヲトル點ノミデ單独的ニ定マルダケ定義サレルモノトス。詳細ハ以下ノ證明カラ明瞭ニナル。

(證) (2°)$\longrightarrow$(1°) ノ證 Ω ノ開集合ノ basis トシテ $0 \leqq f \leqq 1$, $f \in \mathcal{L}_b$ ニヨル $[f>0]$ ノ全体ガ與ヘラレルコト自明.

今 $p_0 \in \Omega$ デ $f(p_0) > \alpha > 0$ トスレバ $f_1 = (f-\alpha) \vee 0$ トオクト $[f>\alpha] = [f_1 > 0]$ ガ成立スル. $f_n = n f_1 \wedge 1$, $n = 2, 3, \cdots\cdots$ トオイテ $\bigvee_n f_n$ ヲ考ヘルト，コレハ $\overline{[f_1>0]}$ ノ特性函數ヲ表ス連續函數トナル。從ッテ $\overline{[f_1>0]}$ ハ開且ツ閉即チ Ω ハ Boolean space トナル. 次ニ basic open set O_α ノ族ヲ與ヘソノ特性函數 $f_\alpha(p)$ カラ $\bigvee_\alpha f_\alpha$ ヲ作ルトコレカラ $\overline{\sum O_\alpha}$ ガ開集合ヲ作ルコトヲ知ル. 故ニ Ω ハ complete Boolean algebra ノ表現空間デアル。

(1°) → (3°) ノ証. $f, g \in \mathcal{L}_\Omega$ ノトキ $f+g$ ノ定義ノ可能性及ビ $f_\alpha \geqq 0$ ノトキ $\bigcap_\alpha f_\alpha$ ノ存在証明ヲ行ヘバ充分デアル. 有限値ヲトル点デ $f(p)+g(p)$ ニヨッテ $f+g$ ノ値ト定メコレト對等ナ連続函数 h ヲ以テ $f+g=h$ ト定メル.
$f(p) = g.\,l_\alpha.\,b.\, f_\alpha(p)$ ト置クトキ $f(p)$ ハ上半連続函数デアル、コレト對等ノ連続函数ヲ h トスレバ $h = \bigcap_\alpha f_\alpha$ トナル。

(3°) → (1°) ハ自明. 依ッテ定理ハ完全ニ証明サレタ。

(注意) 本定理ノ條件ガ成立スルトキ $\mathcal{L}$ ヲ 1 ヲ含ム $\mathcal{L}_\Omega$ ノ vector sub-lattice トスルトキ $\mathcal{L}$ ノ函数ニヨリ区別シ得ナイ点即チ $\mathcal{L}$ ノ函数ガ常ニ相等シイ値ヲトル点ヲ恒等視シテ Zerlegungsraum $\Omega_\mathcal{L}$ ヲ作ッテ $\mathcal{L}$ ヲ $\Omega_\mathcal{L}$ 上ノ vector lattice ト考ヘルコトガ出来ル。$\Omega_\mathcal{L}$ ハ $\mathcal{L}$ ニヨリ単独的ニ定マル bicompact Hausdorff space ガ $\Omega_\mathcal{L}$ 上ノ有限連続函数ハ $\mathcal{L}$ ノ函数デ一様ニ近似スルコトガ出来ル. コノ位相的手続ハ周知ノコトデアルカラ改メテ述ベルマデモナイ。以下 $\Omega_\mathcal{L}$ ヲ作ルコトヲ Ω ヲ $\mathcal{L}$ ニ依ッテ reduce スルト云フコトニスル。

§2. "表現論" ノ第二節ノ記法及ビ結果ヲ利用スル. L ヲ Archimedean vector lattice トシ, ソノ normal ideal ノ全体ヲ $\mathbf{N}$ トスレバ $\mathbf{N}$ ハ complete Boolean algebra ヲ作ル. ソノ表現空間 Ω 上 L ニ對

應スル連續函数ノ vector lattice ヲ $\mathcal{L}$ トシ $\mathcal{L}$ ノ函数ニヨリ majorize サレル[1] $\mathcal{L}_\Omega$ ノ函数族ヲ $\overline{\mathcal{L}}$ デ表ス. $\overline{\mathcal{L}}$ ハ $\mathcal{L}_\Omega$ ノ vector sub-lattice トシテ complete ナコトハ自明デアルガ次ノ定理ガ成立スル。

定理 2.1　無制限ニ L ノ join, meet ヲ保存スル L ヲ含ム最小ノ complete vector lattice $\overline{L}$ ガ存在スル.[2] $\overline{L}$ ハイヅレモ $\overline{\mathcal{L}}$ ニ linear-lattice-isomorphic デアル。

(証)　任意ノ $h\in\overline{\mathcal{L}}$ ヲトル. $g=\bigwedge(f;\ f\geqq h,\ f\in\mathcal{L})$ トオイテ $h=g$ トナルコト及ビソノ dual ガ成立スルコトヲ示ス。$g\geqq h$ ナルコト自明。モシ $g>h$ トスレバ $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}(e_\lambda)$ ヲ適當ニトリ $\mathfrak{a}\in\mathfrak{p}^*$ ノトキ $g(\mathfrak{p}^*)>h(\mathfrak{p}^*)+\lambda$, $(\lambda>0)$ ナラシメ得ル。

今 $x\in\mathfrak{a}$, $0<x<\lambda e_\lambda$ ナル x ヲトレバ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ハ $\mathfrak{a}\in\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{a}'\in\mathfrak{p}^*$ ニ從ツテ $0\leqq f_x(\mathfrak{p}^*)<\lambda$ 或ハ $f_x(\mathfrak{p}^*)=0$ トナル。故ニ $g\geqq h+f_x$。

コレカラ g ノ定義ト矛盾スルコトガ容易ニ分ル。dual ナ部分ノ証明モ同様ニ行ヘル。次ニ M, N ヲ L ノ部分集合, 且ツ $x\in M$, $y\in N$ カラ $x\leqq y$ ガ成立スル maximal set トスル. コノトキ $\bigwedge(y-x;\ x\in M,\ y\in N)=0$ ガ成立スル。コレハ表現空間デ $\bigvee(f_x;\ x\in M)=\bigwedge(f_y;\ y\in N)\in\overline{\mathcal{L}}$ ガ成立スルコトカラ知ラレル. コレカラ証明ノ本筋ニ入ル.

---

(1)　$|h|\leqq f$, $f\in\mathcal{L}$ ナル如キ $h\in\mathcal{L}_\Omega$ ノ全体.

(2)　中野秀五郎, 紙上談話會 1941, 915.

L ノ join, meet ヲ無制限ニ保存スル L ヲ含ムcomplete vector lattice ヲ考ヘタトキ L ノ要素デmajorize サレル要素ノ全体ヲ $\overline{L}$ トシ $\overline{L}$ ト $\overline{\mathcal{L}}$ トガ $L \leftrightarrow \mathcal{L}$ ノ関係ヲ保存シテ linear-lattice-isomorphic ナルコトヲ示セバヨイ。コノ関係ハ $z \in \overline{L}$ ニ對シテ $M=(x;\ x \leqq z,\ x \in L)$ $N=(y;\ y \geqq z,\ y \in L)$ ニ依ッテ $z=\bigvee_{x\in M} x=\bigwedge_{y\in N} y$ ガ成立スルコトカラ $\overline{L}$ ト $\overline{\mathcal{L}}$ トノ間ニ我々ノ欲スル對應ガ得ラレルコトガ分ル。

以上ニヨッテ本定理ハ証明サレタコトヽナル。コノ定理ノ証明カラ次ノコトガ分ル。

定理2.2. $\mathcal{L}$ ハ L ノ linear-lattice-isomorphic ナ表現デアルガ $\mathcal{L}_\Omega$ ノ sublattice トシテ無制限ニ L ノ join, meet ヲ保存スル表現デアル。

定理2.3. 無制限ニ L ノ join, meet ヲ保存スル L ヲ含ム唯一ツノ最小ノ σ-complete vector lattice ガ存在スル。

§3. σ-Boolean algebra ノ表現Boole空間ニツイテモ§1ノ所論ニ類スルモノガ得ラレル。

定理3.1. Ω ヲBoole代数 A ノ表現空間トスルトキ次ノ條件ハ互ニ對等デアル。

(1°) A ハ σ-Boole代数デアル。

(2°) Ω ノ basic open set ヲ含ム最小ノ Borel 族ノ任意ノ集合ハ第一種集合ヲ法トシテ basic open set ト一

致スル。

(3°) 任意ノ有界 Baire 函數ハ第一種集合上ヲ除イテ連續函數ト一致スル。

(4°) (3°)ノ函數ヲ第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトル函數デ置キカヘテ得ラレルモノ。

定理 3.2 Ω が Boole 代數 A ノ表現 Boole 空間デ A が σ-Boole 代數ノトキ第一種集合ヲ法トシテ basic open set ト一致スル集合ノ族ヲ $\mathfrak{M}$ トスル ($\mathfrak{M}$ ハ Borel 族ニナル) トキ次ノ條件ハ互ニ對等デアル。

(1°) $f(p)$ ハ第一種集合上ヲ除イテ連續函數ト一致スル。

(2°) $f(p)$ ハ $\mathfrak{M}$ ニ關シテ可測デアル。

定理 3.3. Ω ヲ bicompact Hausdorff 空間トスルトキ次ノ條件ハ互ニ對等デアル。

(1°) Ω ハ σ-Boole 代數ノ表現 Boole 空間デアル。

(2°) $\mathcal{L}_B$ ハ σ-complete vector lattice デアル。

(3°) $\mathcal{L}_\Omega$ ハ σ-complete vector lattice デアル。

§4. Ω ヲ complete (或ハ σ-) Boole 代數 A ノ表現 Boole 空間トスル。Ω ノ basic open set ヲ含ム最小ノ Borel 族ヲ $\mathcal{L}$ ノ第一種集合ヲ法トシテ basic open set ト一致スル集合ノ族ヲ $\mathfrak{M}$ トスルト $\mathfrak{M}$ ハ

Borel 族デアル。今 $\mu(a)$, $a \in A$ ヲ値域トシテ Archimedean vector lattice L ヲモツ countably additive vector 値函数トスル。即チ $a = \vee a_n$, $a_n \wedge a_m = 0$, $(m \neq n)$ ノトキ $\mu(a) = \mu(a_1) + \mu(a_2) + \cdots\cdots$ ガ成立スルモノトス。a ニ対スル $\mathfrak{S}$ ノ basic open set ヲ O_a トスルトキ $\mu(O_a) = \mu(a)$ トオクトコレハ basic open set 上ノ集合函数トナル。

定理4.1. $\mu(O_a)$ ハ $\mathfrak{B}$ 上ノ countably additive ナ vector 値函数ニ拡大サレル。尚 O_a デ $\mu(O_a)$ ト一致スル $\mathfrak{B}$ 上ノ countably additive ナ vector 値函数ハ唯一ツシカ存在シナイ。

（証）　$E \in \mathfrak{B}$ ノトキ $E = O_a P$ ノ形（P ハ第一種集合）ノ形ニカヽレル。$\mu(E) = \mu(O)$ ト置クコトニヨリ $\mu(E)$ ノ定義ガ確定スル。コレガ $\mathfrak{B}$ 上デ countably additive ナルコトガ容易ニ知ラレル。次ニ $\nu(E)$ ヲ O_a デ $\mu(O_a)$ ト一致スル countably additive ナ vector 値函数トスル。$\mu(E) = \nu(E)$ ガ成立スル E ノ族ヲ $\mathfrak{N}$ トスルトキ $\mathfrak{N}$ ハ次ノ性質ヲモツ

(i) $E \in \mathfrak{N}$ ノトキ $E^c \in \mathfrak{N}$　(ii) $O_a \in \mathfrak{N}$　(iii) $E_n \in \mathfrak{N}$, $E_n E_m = 0$, $(n \neq m)$ ノトキ $\sum E_n \in \mathfrak{N}$. コレカラ $\mathfrak{N} = \mathfrak{B}$ ナルコトヲ知ル。

（注意）　$\mu(a)$ ガ $a \neq 0$ ノトキ常ニ正ナラバ $\mu(E) = 0$, $(E \in \mathfrak{B})$ ト $E \in \mathfrak{B}$ ガ第一種集合トハ對等ノ命題ナリ。

定理4.2　$\mu(O_a)$ ハ $\mathfrak{M}$ 上デ countably additive

ナ vector 値函数ニ拡大サレル。

(証) 定理4.1ノ証カラ自明。

今Aが単ニBoolean algebraノトキ$\mu(a)$ヲadditiveトスルトキLがregular complete且$\mu(a)$がlattice的ニ有界ノトキΩノBorel集合族上ノcountably additiveナ集合函数ニ拡大サレル。コレハ連続函数空間ノ作用素ノ解析的表現ヲ得ルタメニ重要ナモノデアル。コレニツイテハ次ノ機会ニノベル。

§5. "表現論"ヘ簡単ナ補足ヲ加ヘル。LヲArchimedean vector latticeトシ§2デ述ベタヤウニ$\mathcal{L}$, $\Omega_{\mathcal{L}}$等ヲ考ヘル。

(i) 角谷氏ノ定理

Lが単位eヲモツトキ$\Omega_{\mathcal{L}}$上デ$\mathcal{L}$ヲ考ヘルコトニヨッテコノ定理ノ拡張が得ラレル。

(ii) "表現論"デσ-complete ナLニ於テ主idealノ全体Pヲ媒介トシタLノ表現トノ関係。

Lが単位eヲモツトキPノ表現Boole空間ハ$\Omega_{\mathcal{L}}$ト一致スル。

(iii) Stone, 吉田氏ノ方法トノ関係.

Lが単位ニ関シテ有界性ノ條件ヲ具ヘタトキ吉田氏ノmaximal normal subspaceノ全体ト$\{x ; f_x(\mathfrak{z}^*), \mathfrak{z}^* \text{ハ fixed}\}$ノ全体が一致スル。

(iv) "表現論"デ導入サレタ測度ニツイテ.

前田先生ノ可測集合ハスベテ§4ノ$\Pi\mathcal{L}$ニ属シ§4

ノ測度ト一致スル．測度０ノ集合ハ第一種集合デアリ測度０ノ集合ヲ無視シテヲ第一種集合ヲ無視シテデ置キカヘタモノガ§１，§３ノ所論デアル。