997. 一般ナル係數体ヲ有スル代數函數体及ビ多元環ニ就テ III

稲葉　榮次（海兵）

$\Lambda(z)$ノ上ノ代數函數体Kニ於テ常數体Λノ擴大ヲ行ヒΛ'トシタ場合Kニ於ケル因子$\mathfrak{a}$ハ$K'=K\Lambda'$ニ於テ如何ニナルカトイフニ，コノ常數体擴大ニ關シ *ganz abgeschlossen* ナル場合ニハ$\Lambda[z]$ノ上ノKノ Hauptordnung Iノアル *Modulbasis* ガソノマヽ$\Lambda'[z]$ノ上ノK'ノ *Hauptordnung* I'ノ *Modulbasis* トナリ，從ッテzノ分母ニ素ナル因子$\mathfrak{a}$ニ對應スルIニ於ケル *Ideal* $\mathfrak{a}_z$ノI'ニ於ケル擴大 *Ideal* $\mathfrak{a}_z$ニ對應シテK'ニ於ケル因子$\mathfrak{a}'$ガ得ラレル。コレガKニ於ケル因子$\mathfrak{a}$ノK'ニ於ケル擴大デアル。

次ニ係數体縮少ヲ行ヒΛヲ$\bar{\Lambda}$ニシタ場合ハKニ於ケル因子$\mathfrak{a}$ニ對應スルモノガ$\bar{K}$ニアルトハ限ラヌ。

併シ *geschlechttren* ナ係數体縮少ノ場合ハKニ於ケル素因子$\mathfrak{P}$ハ$\bar{K}$ニ於ケル或ル素因子$\mathfrak{P}^*$ノKニ於ケル擴大ナル因子ニ含マレル素因子トナル。即チ$\mathfrak{P}_z$ニ屬スル$\Lambda[z]$ニ於ケルzノ最低次ノ多項式$f(z)$トスルトキ，$\bar{\Lambda}[z]$ニ於テ$f(z)$デ割レルzノ最低次ノ多項式$f^*(z)$トスル。$(f^*(z))$ハ$\bar{\Lambda}[z]$ノ上ノ$\bar{K}$ノ *Hauptordnung* $\bar{I}$ニ於ケル *Ideal* トシテ *Primideal* ノ積ニナル。コレヲIニ於ケル *Ideal* ニ擴大シテ考ヘレバ

$\mathfrak{P}_z$ ハ是等ノ Primideal ノ擴大ノ何レカノ Primteiler トナルカラ $\mathfrak{P}$ ハコノ Primideal ニ對應スル $\overline{K}$ ノ素因子ノ拡大ニ含マレル素因子デアル。特ニ $K=\bar{\Lambda}(z, n)$ トスルトキ $f(z)$ ノ係數ガスベテ $\bar{\Lambda}$ ニ屬シ, 亦係數 $\Lambda[z]$ ニ屬スル n ノ多項式デ $\mathfrak{P}_z$ ニ屬スル最低次ノモノ $\varphi(z, n)$ ノ係數ガスベテ $\bar{\Lambda}$ ニ屬シ, 且ツ n ノ Dishriminant ガ $f(z)$ ニ素ナル場合ニハ $\mathfrak{P}_z$ ハ $\overline{K}$ ニ於ケル Primideal ノ拡大デアル。（Primideal ノ次數ヲ考慮スレバイヽ）從ツテカヽル K ニ於ケル素因子 $\mathfrak{P}$ ハ $\overline{K}$ ニ於ケル素因子ノ拡大トナル。

次ニ Restbildung ニ依ツテ K ニ於ケル因子 $\mathfrak{a}$ ニ對應スルモノガ $\overline{K}$ ニアルカ否カヲシラベルニハ z ノ分母ハ $\mathfrak{a}$ ニ素デアルトシ, $\Lambda[z]$ ノ上ノ K ノ Hauptordnung I ヲトリ因子 $\mathfrak{a}$ ニ對應スル I ニ於ケル Ideal $\mathfrak{a}_z$ ヲ考ヘ $\mathfrak{a}_z$ ニ對應スル $\bar{I}$ ニ於ケル Ideal $\bar{\mathfrak{a}}_z$ ヲ考ヘ $\bar{\mathfrak{a}}_z$ ニ對應シテ $\overline{K}$ ニ於ケル因子 $\bar{\mathfrak{a}}$ ガ定マルトイフ順序ヲ經ル。コノ場合 $\bar{I}$ ハ $\bar{\Lambda}[z]$ ノ上ノ $\overline{K}$ ノ Hauptordnung デナケレバナラヌガ, イツデモ $\mathfrak{a}_z$ ニ對應スル $\bar{\mathfrak{a}}_z$ ガ存在スルトハ限ラヌ. $\mathfrak{a}_z$ ノアル Modulbasis ヲ q_i ($i=1, 2, \cdots\cdots n$) トスルトキ

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}\, o_j$$

Q_{ij} ハ $\Lambda(z)$ ニ屬スル元デ $\mathfrak{z}$-ganz 且ツ $|Q_{ij}|$ ナル行列式ノ分子ノ多項式ノ係數ガスベテ $\mathfrak{z}$ ニ屬スルコト無

キトキハ$\overline{\mathfrak{a}_z}$ガ存在スル。

何トナレバ $\bar{q}_i=\sum_{j=1}^{n}\overline{Q_{ij}}\,\overline{O_j}$ ヲ Basis トシタ$\bar{\Lambda}[z]$-Modul ガ出来ルガ コノ際ニ

$$q_iO_k=\sum_{j=1}^{n}q_jR_{ijk},\qquad R_{ijk}\subset\Lambda[z]$$

ニシテ R_{ijk} ハ $\mathfrak{p}$-ganz トナリ

$$\overline{q_i}\;\overline{O_k}=\sum_{j=1}^{n}\overline{q_j}\cdot\overline{R_{ijk}}$$

デアルカラ $\bar{\Gamma}$ ニ於ケル Ideal トナル。コレガ$\overline{\mathfrak{a}_z}$デアル。カクノ如キ Ideal $\mathfrak{a}_z$ ヲ abbildbar トイフ。特ニ行列式 $|Q_{ij}|$ ノ分子分母ニ於ケル最高冪ノ係數ガ $\mathfrak{p}$ ニ素ナルトキハ $\mathfrak{a}_z$ ノ次數ト $\overline{\mathfrak{a}_z}$ ノソレトハ同ジデアル。カクノ如キ $\mathfrak{a}_z$ ヲ gradtreu abbildbar トイフ。$\mathfrak{a}_z$ ガ abbildbar ナルトキ因子 $\mathfrak{a}$ ヲ abbildbar トイフ。以後 abbildbar トハ gradtreu abbildbar ノ意味ニ解釋スル。abbildbar デナイ Ideal ハ，例ヘバ $a\neq 0\subset\mathfrak{p}$ ナルトキ $z-\frac{1}{a}$ デ生ズル Ideal ノ如キモノデアル。

$\mathfrak{p}_z$ ガ一次ノ素 Ideal ナラバ $\overline{\mathfrak{p}_z}$ モソウデアルガ，$\mathfrak{p}_z$ ガ一次デナイ素 Ideal ナルトキハ $\overline{\mathfrak{p}_z}$ モ素 Ideal デアルトハ限ラヌ。亦 $\mathfrak{a}_z$ ガ abbildbar ナルトキ $\overline{\mathfrak{a}_z}$ ハ $\mathfrak{a}_z$ ノ Modulbasis ノ撰ビ方ニ關係シナイ。

何トナレバ$\mathfrak{o}_z$ノModulbasisヲq_i及ビq'_iトシ,

$$q_i=\sum_j Q_{ij}o_j,\quad q'_i=\sum_j Q'_{ij}o_j$$

デQ_{ij}及ビ$Q'_{ij}$$\mathfrak{Z}$-ganzデ$|Q_{ij}|$, $|Q'_{ij}|$ノ分母分子ノzノ最高冪ノ係數$\mathfrak{Z}$ニ素デアルカラ$q'_i=\sum_j C_{ij}q_j$ニ於テC_{ij}ハ$\mathfrak{Z}$-ganzデ$|C_{ij}|\subset\Lambda$, $|C_{ij}||Q_{ij}|=|Q'_{ij}|$デアルカラ$|C_{ij}|$ハ$\mathfrak{Z}$ニ素デアル。ソコデ$\overline{q}'_i\to\overline{q}_i$及ビ$\overline{q}_i\to\overline{q}'_i$ナルTransformation可能デ$\overline{q}'_i$及ビ$\overline{q}_i$ニ依ツテ同一ノ$\overline{\Lambda}[z]$-Modul $\overline{\mathfrak{o}}_z$ガ生ズル。

〔定義〕 $\Lambda(z)$ノ元ガ$\mathfrak{Z}$-ganzナルトキ即チzノ多項式ノ商トシタル場合係數スベテ$\mathfrak{Z}$-ganzデ分母ノ係數ノ中ニ$\mathfrak{Z}$ニ素ナルモノアル場合,分子ノzノ多項式ノ係數ノ$\mathfrak{Z}$-BeitragノMinimumヲコノ$\Lambda(z)$ノ元ノ$\mathfrak{Z}$-Beitragトイフ. $\mathfrak{Z}$-Beitragガ1ナルトキ,コノ元ハ$\mathfrak{Z}$ニ素トイフ。

〔定義〕 Iニ於ケルPrimideal $\mathfrak{p}_z$ガアル$\Lambda(z)$ニ屬スル元ニmod $\mathfrak{Z}$素ナリトハソノ元ノRestbildガ$\mathfrak{p}_z$ニ屬スルzノ最低次ノ多項式ノRestbildニ素ナルコトデアル。

〔定理15〕 KガIニ屬スルηヲ$\Lambda(z)$ニ添加シテ出來タseparableナ代數函數体デアリ,$\overline{\mathrm{K}}$ハ体デ$\overline{\mathrm{I}}$ハ$\overline{\Lambda}[z]$ノ上ノ$\overline{\mathrm{K}}$ノHauptordnungナル如キRestbildungガアルトスル。

今素因子 $\mathfrak{p}_z$ ガ z ノ分母ニ素デ且ツ $\Lambda(z)$ ニ関スル Diskriminant ニモ mod $\mathfrak{p}$ 素ナルトキ，$\mathfrak{p}_z$ ニ属スル z ノ最低次ノ多項式 $f(z)$ トシ，ソノ最高冪ノ係数 1 ニシテ他ノ係数スベテ $\mathfrak{p}$-ganz 且ツ $\overline{f(z)}$ ガ $\overline{\Lambda(z)}$ ニ於テ既約ナルトキ $\mathfrak{p}_z$ ハ abbildbar デアル。

〔証〕 u ノ $\Lambda(z)$ ニ於テ満足スル既約方程式ヲ $\psi(z,u)=0$ トス。コノ最高冪ノ係数ハ 1 デ他ハ $\mathfrak{p}$-ganz ナ z ノ多項式デアル。サテ $\psi(z,t)$ ナル t ノ多項式ガ mod $f(z)$ 可約ナリトシテ

$$\psi(z,t)\equiv\psi_1(z,t)\,\psi_2(z,t) \mod f(z)$$

トナルトキハ，ψ_1,ψ_2 ニ於ケル t ノ最高冪ノ係数ハ 1 デ他ハ $\mathfrak{p}$-ganz ナ z ノ多項式トナル。ソノ証明ハ次ノ如クスル。

ψ_1,ψ_2 ニ於ケル t ノ冪ノ係数ハ次数ガ $f(z)$ ノソレヨリ小ナル z ノ多項式トシテイゝ。今 ψ_1 或ハ ψ_2 ノ t ノ冪ノ係数ノウチニ $\mathfrak{p}$-ganz デナイモノアリトシ，$\mathfrak{p}^{e_1}$ デ丁度割レル Λ ノ元 a_1 ヲ $\psi_1(z,t)$ ニ乗ジテソノ係数スベテ $\mathfrak{p}$-ganz トナリ，ソノウチデ $\mathfrak{p}$ ニ素ナルモノアリ。$\mathfrak{p}^{e_2}$ デ丁度割レル Λ ノ元 a_2 ヲ $\psi_2(z,t)$ ニ乗ジテスベテノ係数 $\mathfrak{p}$-ganz トナリ，ソノウチニ $\mathfrak{p}$ ニ素ナルモノアリトスル。シカラバ

$$a_1a_2\psi(z,t) - a_1\psi_1(z,t)\,a_2\psi_2(z,t)$$

ノ t ノ冪ノ係数ハスベテ $f(z)$ デ割レ，ソノ商ノ係数ハスベテ $\mathfrak{p}$-ganz デアル。今 $a_1\psi_1(z,t)$ ニ於ケル係数 $\mathfrak{p}$ ニ

素ナル t ノ最高冪 t^{ν_1} ノ係數ヲ $\theta_1(z)$, $a_2\psi_2(z,t)$ ニ於ケル係數 $\mathfrak{z}$ ニ素ナル t ノ最高冪 t^{ν_2} ノ係數ヲ $\theta_2(z)$ トシ $t^{\nu_1+\nu_2}$ ノ項ノ係數ヲ考ヘレバ, $e_1+e_2 \geqq 1$ デアルカラ

$$\overline{\theta_1(z)} \cdot \overline{\theta_2(z)} \equiv 0 \mod \overline{f(z)}$$

トナリ, $\overline{\theta_1(z)}$ 及ビ $\overline{\theta_2(z)}$ ハ共ニ次數 $\overline{f(z)}$ ノソレヨリ小ナルヲ以テ $\overline{\theta_1(z)}=0$ 或ハ $\overline{\theta_2(z)}=0$ トナリ不合理. 依ッテ ψ_1, ψ_2 ニ於ケル t ノ冪ノ係數ハスベテ $\mathfrak{z}$-ganz ナリ。

サテ $\Lambda[z] \mod f(z)$ ナル剩餘体ヲ $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ トシ, $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ ニ於ケル $\psi(z,t)$ ノ既約因數デ u ノ満足スルモノヲ $\psi_1(z,t)$ トスル. $\psi_1(z,u)$ ハ $\mathfrak{p}_z$ ニ屬スル u ノ最低次ノ多項式デアル。ψ_1 ノ t ニ關スル次數ヲ f トス. Hauptordnung I ノ $\mathfrak{p}_z$ ニヨル剩餘体 $K_{\mathfrak{p}}$ ハ $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \psi_1(z,t)=0$ ノ根ヲ添加シタモノニ同型デアル. $\psi_1(z,t)$ ノ係數ハ上述ニヨリスベテ $\mathfrak{z}$-ganz デ t ノ最高冪ノ係數ハ 1 トシテイヽ. サテ I ノ Modulbasis ヲ $O_1=1, O_2, \cdots\cdots O_n$ ヲトルトキ (I ニ屬スルモノハスベテ Exponent $\geqq 0$ デアッテ 1 ハ Exp 最大デアルカラ $O_1=1$ トシテイヽ) コレラヲ u デ表ハシ

$$O_i = a_{i0} + a_{i1}u + \cdots\cdots + a_{\cdot,n-1}u^{n-1}$$

$$a_{ij} \subset \Lambda(z)$$

トスルト, a_{ij} ハ勿論 $\mathfrak{z}$-ganz デアラネバナラヌガ假定ニヨリ a_{ij} ノ分母ハ $\mathrm{mod}\ \mathfrak{z}\cdot\mathfrak{p}_z$ ニ素デアル. 且ツ

$|a_{ij}|$ ハ $\mathfrak{p}_z$ ニ mod $\mathfrak{z}$ 素トナル。

$$\begin{aligned} o_i = b_{i0} + b_{i1}u + \cdots\cdots + b_{i,f-1}u^{f-1} \\ + \psi_1(z, u)(c_{if} + c_{i,f+1}u + \cdots\cdots) \end{aligned}$$

$$b_{ij},\ c_{ij} \subset \Lambda(z)$$

ト表シカヘタトキ

$$\begin{vmatrix} b_{10}, & b_{11}, & b_{12} \cdots\cdots & b_{1,f-1}, & c_{1,f}, & c_{1,f+1} \cdots\cdots \\ b_{20}, & b_{21}, & \cdots\cdots & b_{2,f-1}, & c_{2,f}, & c_{2,f+1} \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots\cdots \\ a_{20} & a_{21} & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

トナル。$\mathfrak{p}_z$ ハ $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ ノ全母ニ盡ク mod $\mathfrak{z}$ 素デアル。$|\overline{a_{ij}}|$ ハ $\overline{f(z)}$ デ割レズ，$b_{i,j}$, $c_{i,j}$ ハ $\mathfrak{z}$-ganz デアルカラ $(\overline{b_{ij}})$ ナル Matrix ノ f 次ノ行列式ノウチニ $\overline{f(z)}$ デ割レヌモノガアル。

コノ行列式ハ o_i ノウチノ $o^{(1)}, o^{(2)}, \cdots\cdots o^{(f)}$ ノ係數デ出来テオルトスル。シカラバ $o^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots f)$ ハ $\Lambda\mathfrak{p}$ ノ上デ unabhängig デ他ノ o_i ハ mod $\mathfrak{p}_z$ コレラノ $o^{(i)}$ ニヨッテ $\mathfrak{z}$-ganz ナ係數ヲ以テ表ハサレル。即チ

$$o_i \equiv \sum_{\nu=1}^{f} \varphi_{i\nu}[z]\, o^{(\nu)} \quad \mathrm{mod}\ \mathfrak{p}_z$$

デ $\varphi_{i\nu}[z]$ ハ $\mathfrak{z}$-ganz ナ z ノ多項式トナル。

ソコデ $\mathfrak{p}_z$ ノ Modulbasis ハ $f(z)\, o^{(\nu)}$ $(\nu=1,$

$2, \cdots\cdots f$）及ビ

$$o_j - \sum_{\nu=1}^{f} \varphi_{j\nu}[z]\, o^{(\nu)}$$

ナルコトガ容易ニワカル。（但シ o_j ハイヅレノ $o^{(i)}$ デモナイスベテヲ durchlaufen スル）。更ニコノ場合 $|Q_{ij}| = f(z)^f$ デアルカラ $\mathfrak{P}_z$ ハ abbildbar デアル。

（証終）

一般ニ如何ナル Ideal ガ abbildbar デアルカヲハッキリ定メルコトハ困難デアル。$\overline{f(z)}$ ガ $\overline{\Lambda}(z)$ デ既約デナイトキハ $\mathfrak{P}_z$ ガ abbildbar デナイコトガアル。ソノ例ハ k ガ標数 $\neq 3$ ニシテ1ノ三乗根ヲ含ム任意ノ体トシ，ソレニ ξ ナル不定元ヲ添加シタ $k(\xi) = \Lambda$ ヲ常数体トシ $\Lambda(z) = \sqrt[3]{z^3+1}$ ヲ添加シタ代数函数体 K ニ於テ明カニ $1, \sqrt[3]{z^3+1}$ 及ビ $\sqrt[3]{(z^3+1)^2}$ ハ $\Lambda[z]$ ノ上ノ Hauptordnung I ノ modulbasis デアル。

$k(\xi)$ ノ元デ分母ガ ξ デ割レヌ元ノ集合デアル Ring ニ於テ分子ガ ξ デ割レル元ノ集合ハ Ideal デアッテ，コレニヨリ Abbildungsideal ガ定マルトス．シカシバ $\overline{K}$ ハ $\overline{\Lambda}(z) = \sqrt[3]{z^3+1}$ ヲ添加シテ生ズルガ，diskriminant ハ mod $\mathfrak{z}$ デ z ノ分子ノ因子ニ素デアル。

$$u^3-(z^3+1)\equiv\left(u-\frac{z}{\xi}\right)\left(u^2+\frac{z}{\xi}u+\frac{z^2}{\xi^2}\right)\ \mathrm{mod.}\ z^3-\frac{\xi^3}{1-\xi^3}$$

$$f(z)=z^3-\frac{\xi^3}{1-\xi^3}$$

トスレバ

$$\overline{f(z)}=\bar{z}^3$$

コノトキ $z^3-\dfrac{\xi^3}{1-\xi^3}$, $\sqrt[3]{z^3+1}-\dfrac{z}{\xi}$ デ生ズル Primideal ハ上記ノ Restbildung ニヨッテ abbildbar デハナイ。

〔定理16〕 abbildbar ナ Ideal $\mathfrak{a}_z$ ガ Hauptideal (A) ナルトキ Restbild $\overline{\mathfrak{a}}_z$ ハ $\overline{K}$ ニ於テ Hauptideal $(\overline{A})$ トナル。但シ $\overline{A}$ ハ零ナラザルモノトス。

(証) $\mathfrak{a}_z$ ノ Modulbasis ヲ q_i トスル

$$q_i=\sum Q_{ij}\,o_j$$

Q_{ij} ハ $\Lambda(z)$ ニ属スル元デ $\mathfrak{z}$-ganz デ $|Q_{ij}|$ ノ分子分母ノ z ノ最高冪ノ係数ハ $\mathfrak{z}$ ニ素デアルトス。假定ニヨリ

$$A\,o_i=\sum_j c_{ij}[z]\,q_j$$

$c_{ij}[z]$ ハ $\Lambda[z]$ ニ属スル z ノ多項式デ $\mathfrak{z}$-ganz デ $|c_{ij}[z]|$ ハ Λ ニ属スル

$$|C_{ij}[z]|\,|Q_{jk}| = N(A)$$

$N(A)$ ハ假定ニヨリ $\mathfrak{z}$-ganz デ $\mathfrak{z}$ ニ素デアルカラ $|C_{ij}[z]|$ ハ $\mathfrak{z}$ ニ素ナベノ元デアル。

故ニ
$$\bar{A}\,\bar{o}_i = \sum_j \overline{C_{ij}[z]}\;\bar{q}_j$$

$|\overline{C_{ij}[z]}| \neq 0 \subset \bar{\Lambda}$ デ $\bar{A}\,\bar{o}_i$ ハ $\bar{\mathfrak{o}}_z$ ノ Modulbasis トナリ $\bar{\mathfrak{o}}_z$ ハ Hauptideal $(\bar{A})$ トナル。

〔Lemma 3〕 $\mathfrak{p}_z$ ガ定理 15 ニ於ケル如キ Primideal ナルトキ $B \equiv 1 \mod \mathfrak{p}_z$, $B \equiv 0 \mod \dfrac{f(z)}{\mathfrak{p}_z}$ ナル如キ $\mathfrak{z}$-ganz ナ K ノ元 B ガアル。

（証） u ノ多項式デ最高冪ノ係数 1 ニシテ他ハ $\Lambda[z]$ ニ属スル如キ $\mathfrak{p}_z$ ニ属スル最低次ノモノ $\psi_1(z, u)$ トスル. u ノ $\Lambda(z)$ ニ於テ満足スル既約方程式 $\psi(z, t) = 0$ トスルト

$$\psi(z, t) \equiv \psi_1(z, t)\;\psi_2(z, t) \mod f(z)$$

ψ_1, ψ_2 ノ最高冪ノ係数ハ 1 デ他ハ $\mathfrak{z}$-ganz ナ z ノ多項式デアル. u ノ Diskriminant ガ $\mathfrak{p}_z$ ニ素デアルカラ ψ_1 ト ψ_2 トハ素デ

$$L(z, u)\;\psi_1(z, u) + M(z, u)\;\psi_2(z, u) = 1$$

ナル関係ガアル。コヽデ $M(z, t)$ ノ t ニ関スル次数ハ ψ_1 ノソレヨリ小トシテイヽ。サテ L, M ハ $\Lambda(z)$ ニ於ケル多項式ダガ, ソノ係数ハスベテ $\mathfrak{z}$-ganz デアル. シカラザレバ適当ナ $\mathfrak{z}$ デ割レル Λ ノ元 a ヲ乗ジ, aL 或ハ aM ノ係数ハスベテ $\mathfrak{z}$-ganz デソノウチニ $\mathfrak{z}$ ニ素ナ

ルモノガアル如クシ得ル、ソシテ

$$\overline{aL}\cdot\overline{\varPsi_1}+\overline{aM}\cdot\overline{\varPsi_2}=0$$

トナル。$\overline{aM}=0$ ナラバ $\overline{aL}\neq 0$ デ $\overline{aL}\cdot\overline{\varPsi_1}=0$ トナリ不合理ダカラ $\overline{aM}\neq 0$

$\therefore$ $\overline{\varPsi_2}$ ハ $\overline{\varPsi_1}$ ト素デナイコトニナリ、u ノ discriminant ガ $\mathfrak{p}_z$ ニ mod ヲ素ナル假定ニ反ス。ソコデ $\varPsi_2(z,u)M(z,u)=B$ トスレバイヽ。

〔定理17〕 $\mathfrak{p}_z^{(1)}, \mathfrak{p}_z^{(2)}, \cdots\cdots \mathfrak{p}_z^{(\nu)}$ ガスベテ定理15ニ於ケル如キ abbildbar ナ素 Ideal トスル。シカラバ $\mathfrak{p}_z^{(1)\lambda_1}\ \mathfrak{p}_z^{(2)\lambda_2}\cdots\cdots\mathfrak{p}_z^{(\nu)\lambda_\nu}$ (λ_i ハ任意ノ整数)ナル Ideal ハ abbildbar デ且ツ

$$\overline{\mathfrak{p}_z^{(1)\lambda_1}\ \mathfrak{p}_z^{(2)\lambda_2}\cdots\cdots\mathfrak{p}_z^{(\nu)\lambda_\nu}}=\overline{\mathfrak{p}_z}^{(1)\lambda_1}\ \overline{\mathfrak{p}_z}^{(2)\lambda_2}\cdots\cdots\overline{\mathfrak{p}_z}^{(\nu)\lambda_\nu}$$

トナル。

(証) (i) 先ヅ λ_i ガスベテ正ナルカ零ナル場合。定理15ニヨリ任意ノ $\mathfrak{p}_z^{(i)}$ ニツキ成立ツカラ、帰納法ニヨッテ $\mathfrak{a}_z$ ガ $\mathfrak{p}_z^{(i)}$ ノ積ナル ganz ナ Ideal ナル場合定理ガ成立スルト假定シ、$\mathfrak{p}_z^{(i)}$ ノウチノ任意ノ $\mathfrak{p}_z$ ヲトッタ場合 $\mathfrak{a}_z\mathfrak{p}_z$ ニツキ定理ノ成立スルコトヲ証スレバイヽ。

$\mathfrak{a}_z$ ノ Modulbasis ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ トスル。

$\mathfrak{a}_z$ ニ入ル $\mathfrak{p}_z$ ノ Beitrag ヲ $\mathfrak{p}_z^e$ トスル。亦 $f(z)$ ガ $\mathfrak{p}_z$ ニ属スル最低次ノ z ノ多項式トスルト $f(z)$ ハ丁度 $\mathfrak{p}_z$ デ割レル。シカラザレバ $\mathfrak{p}_z$ ノ u ノ Diskriminant ニ素デナイコトニナル。

サテ $$\frac{\alpha_i}{f(z)^e} \equiv k_i \mod \mathfrak{p}_z$$

デアッテ k_i ハ K_z ノアル元ヲ代表スル。

k_i ハ u' ノ $(f-1)$ 次多項式トシテ表ハストキ、ソノ係数ハスベテ $\mathfrak{z}$-ganz ナ z ノ多項式デアルトシテイヽ。何トナレバ Lemma 3 ニヨリ

$$\frac{\alpha_i B^e}{f(z)^e} \equiv k_i \mod \mathfrak{p}_z$$

デ $\frac{\alpha_i B^e}{f(z)^e}$ ハ I ニ属シ $\mathfrak{z}$-ganz ナ係数ヲ有スルカラ。

k_i ヲ u ノ $(f-1)$ 次多項式トシテ表ハシタトキノソノ係数デ作ッタ f 次行列式ノウチニ $f(z)$ デ割レズ且ツ $\mathfrak{z}$-Beitrag ノ最小ナルモノガアル。何トナレバカヽル f 次行列式ガスベテ $f(z)$ デ割レルトスルト α_i ノウチデ $\mod \mathfrak{p}_z^{e+1}$ ハ $\mathfrak{p}$ ノ上デ unabhängig ナモノガ f 個ヨリ小トナッテ不合理デアル。

サテカヽル f 次行列式ハ $k_1, k_2, \cdots\cdots k_f$ ニ於ケル係数ニヨッテ生ズルモノトシテ、$\mathfrak{a}_z \mathfrak{p}_z$ ノ Modulbasis ヲ次ノ如ク定メル。

$$\gamma_1 = f(z)\alpha_1, \quad \gamma_2 = f(z)\alpha_2 \cdots\cdots \gamma_f = f(z)\alpha_f$$

$i \geqq f+1$ ナルトキハ

$$\gamma_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{f} l_{ij}[z]\,\alpha_j$$

トシ，$\gamma_i < \mathfrak{p}_z^{e+1}$ ナル如ク $\Lambda[z]$ ニ於ケル $l_{ij}[z]$ ヲ定メル．ソレニハ

$$k_i + \sum_{j=1}^{f} l_{ij}[z]\,k_j \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ f(z)$$

ナル如ク定メレバイヽ。

コノ際 $l_{ij}[z]$ ハ $k_1, k_2, \cdots\cdots k_f$ ノ撰ビ方ニヨッテ $\mathfrak{z}$-ganz ナル如クシ得ル。且ツ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_f$ ハ mod $\mathfrak{p}_z^{e+1}$ $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ ノ上デ unabhängig ダカラ γ_i ハ $\mathfrak{O}_z \mathfrak{p}_z$ ノ Modulbasis デ且ツソノ係数 $\mathfrak{z}$-ganz デアル。

シカシテ γ_i ヲ 0_i デ表ハシタトキノ係数ノ行列式ハ α_i ヲ 0_i デ表シタトキノ係数ノ行列式ニ $f(z)^f$ ヲ乗ジタモノニナル。ソコデ $\mathfrak{O}_z \mathfrak{p}_z$ ハ abbildbar. サテ $\overline{\mathfrak{O}_z \mathfrak{p}_z}$ ハ明ラカニ $\overline{\mathfrak{O}_z}$ ニ属スルカラ $\overline{\mathfrak{O}_z \mathfrak{p}_z} = \overline{\mathfrak{O}_z} \cdot \overline{\mathfrak{Q}_z}$ トナリ $\overline{\mathfrak{Q}_z}$ ハ $\overline{\mathfrak{p}_z}$ ト同ジ次数デ $\overline{f(z)}$ ノ Primteiler ヨリ成ル。

$\overline{\mathfrak{Q}_z} = \overline{\mathfrak{p}_z}$ ナル証明ハ次ノ如クスル．モシ $\overline{\mathfrak{Q}_z} \neq \overline{\mathfrak{p}_z}$ ナラバ $\overline{\mathfrak{Q}_z}$ デ割レ $\overline{\mathfrak{p}_z}$ デ割レヌ $\overline{u}$ ノ多項式ヲ $\chi(\overline{u})$ トシ，ソノ次数ハ f ナルモノガアル（最高冪ノ係数ハ 1 トス）（n ノ Diskriminant ハ mod $\mathfrak{z}$ $\overline{f(z)}$ ニ素デアルカラ）．

$\overline{\mathfrak{a}_z}$ = 入ル $\overline{\mathfrak{Q}_z}$ ノ Beitrag ヲ $\overline{\mathfrak{Q}_z}^{\bar{e}}$ トスレバ $\bar{\alpha}_i$ ノウチニ $\overline{\mathfrak{Q}_z}^{\bar{e}}$ デ割レ $\overline{\mathfrak{Q}_z}^{\bar{e}+1}$ デ割レヌ $\bar{\alpha}_t$ ガアル。$\mathfrak{p}_z$ ニ属スル u ノ最低次（f 次）多項式デ最高冪ノ係数ノナルモノヲ $\psi_1(z, u)$ トスレバ

$$\overline{z(\bar{u})}\ \bar{\alpha}_t = \overline{\psi_1(z, u)} \cdot \bar{\alpha}_t + (z(\bar{u}) - \overline{\psi_1(z, u)})\bar{\alpha}_t$$

$\psi_1(z, u)\alpha_t$ ハ $\mathfrak{a}_z \mathfrak{p}_z$ ニ属スルカラ

$$z(\bar{u})\bar{\alpha}_t = \sum_j \bar{\gamma}_j \overline{g_j[z]} + (z(\bar{u}) - \overline{\psi_1(z, u)})\bar{\alpha}_t$$

$$g_j[z] \subset \Lambda[z]$$

ソコデ $\bar{\gamma}_i$ ガスベテ $\overline{\mathfrak{Q}_z}^{\bar{e}+1}$ デ割レルカラ，次数 f ヨリ小ナル u ノ多項式 $z(\bar{u}) - \overline{\psi_1(z, u)}$ ガ $\overline{\mathfrak{Q}_z}$ デ割レルコトニナリ不合理。

(ii) λ_i ニ負ナルモノノアル場合

$$\mathfrak{p}_z^{(1)\lambda_1} \mathfrak{p}_z^{(2)\lambda_2} \cdots\cdots \mathfrak{p}_z^{(\nu)\lambda_\nu} = \frac{\mathfrak{b}_z}{\mathfrak{a}_z} = \mathfrak{c}_z$$

トオク。

但シ $\mathfrak{a}_z$, $\mathfrak{b}_z$ ハ ganz デアッテ $\mathfrak{p}_z^{(i)}$ ノミヨリナル。

$\mathfrak{c}_z$ ガ abbildbar デ $\overline{\mathfrak{c}_z} = \dfrac{\overline{\mathfrak{b}_z}}{\overline{\mathfrak{a}_z}}$ ナルコトヲ証スレバイヽ。

$$\mathfrak{a}'_z = \frac{N(\mathfrak{a}_z)}{\mathfrak{a}_z} = \frac{(\varphi(z))}{\mathfrak{a}_z}$$

トオケバ (i) ニヨリ $\mathfrak{a}'_z$ ハ abbildbar デ

$$\mathfrak{c}_z = \frac{\mathfrak{b}_z \mathfrak{a}'_z}{\mathfrak{a}_z \mathfrak{a}'_z} = \frac{\mathfrak{b}_z \mathfrak{a}'_z}{(\varphi(z))}$$

$\mathfrak{b}_z \mathfrak{a}'_z$, $\mathfrak{a}_z \mathfrak{a}'_z$ モ abbildbar デ $\overline{\mathfrak{b}_z \mathfrak{a}'_z} = \overline{\mathfrak{b}}_z \cdot \overline{\mathfrak{a}}'_z$, $\overline{\mathfrak{a}_z \mathfrak{a}'_z} = \overline{\mathfrak{a}}_z \cdot \overline{\mathfrak{a}}'_z$ 亦定理16ニヨリ $\overline{\mathfrak{a}_z \mathfrak{a}'_z} = (\overline{\varphi(z)})$.

サテ $\mathfrak{b}_z \mathfrak{a}'_z$ ノアル Modulbasis ヲ $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ トスレバ $\mathfrak{c}_z$ ノ Modulbasis ハ

$$\frac{c_1}{\varphi(z)}, \frac{c_2}{\varphi(z)}, \cdots\cdots \frac{c_n}{\varphi(z)}$$

トナル。

$\overline{\mathfrak{b}_z \mathfrak{a}'_z}$ ノ Modulbasis ハ $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \cdots\cdots, \overline{c}_n$ ナリトシテイヽカラ $\mathfrak{c}_z$ ハ明ラカニ abbildbar トナリ $\overline{\mathfrak{c}}_z$ ノ Modulbasis ハ

$$\frac{\overline{c}_1}{\overline{\varphi(z)}}, \frac{\overline{c}_2}{\overline{\varphi(z)}}, \cdots\cdots \frac{\overline{c}_n}{\overline{\varphi(z)}}$$

トナリ

$$\overline{\mathfrak{c}}_z = \frac{\overline{\mathfrak{b}_z \mathfrak{a}'_z}}{(\overline{\varphi(z)})} = \frac{\overline{\mathfrak{b}_z \mathfrak{a}'_z}}{\overline{\mathfrak{a}_z \mathfrak{a}'_z}} = \frac{\overline{\mathfrak{b}}_z}{\overline{\mathfrak{a}}_z}$$

（証終）

定理17ニ於ケル如キ abbildbar ナ K ノ Ideal $\mathfrak{a}_z$ ハ群 G ヲナシ, Restbild $\overline{\mathfrak{a}}_z$ モ亦群 $\overline{G}$ ヲナスコトガワカル。亦 G ノ部分群デ Hauptideal ノミヨリナル群 H ノ Restbild $\overline{H}$ ハ Hauptideal ノミヨリナル $\overline{G}$ ノ部分群デアル。ソコデ Ideal 類群 G/H

ニIdeal類群$\overline{G}/\overline{H}$ガ對應スルガ同型トナルカ否カハ未ダワカラズ。亦$\overline{I}$ニ於ケル任意ノPrimideal $\mathfrak{p}_z'$ニIノアルabbildbarナIdeal $\mathfrak{p}_z$ガ對應シ$\overline{\mathfrak{p}_z}=\mathfrak{p}_z'$ニナルトハ限ラズガ，次ノ定理ヲ得ル。

〔定理18〕 $K=\Lambda(z,u)$デuハIニ屬シseparableデ且ツ$\overline{K}$ガ体トナリ$\overline{I}$ガ$\overline{\Lambda}[z]$ノ上ノHauptordnungトナル如キRestbildungニ於テ，$\overline{I}$ニ於ケル任意ノPrimideal $\mathfrak{p}_z'$ガuノDiskriminantニmodヲ素ナルトキ，$\mathfrak{p}_z'$ハアルabbildbarナIニ於ケルPrimideal $\mathfrak{p}_z$ノRestbild $\overline{\mathfrak{p}_z}$ノPrimteilerトナル。

（証明） $\mathfrak{p}_z'$デ割レル$\overline{\Lambda}[z]$ニ於ケル最低次ノzノ多項式ヲ$\overline{f(z)}$トシ，$\overline{\Lambda}[z]$ニ於ケル係數ヲ有スル$\overline{u}$ノ多項式デ$\mathfrak{p}_z'$ニ屬スル最低次ノモノヲ$\theta(z,\overline{u})$トス。Kニ於テuノ滿足スル既約式$\psi(z,u)$ノmod $f(z)$ニ於ケル既約因數$\varphi(z,u)$ノRestbild $\overline{\varphi(z,u)}$ガ$\theta(z,\overline{u})$ナル因子ヲ有ストス．シカラバ

$$K_1(z,u)f(z)+K_2(z,u)\varphi(z,u)$$

（但シK_1，K_2ハuノ多項式トシテ係數ノ分母ハスベテ$f(z)$ニ素）ナル形ノ元デIニ屬スルモノノ集合ハIニ於ケルPrimidealデコレヲ$\mathfrak{p}_z$トスル。$\mathfrak{p}_z$ノModulbasisハ定理15ニ於ケル如定マリabbild-

bar デアルガ，ソノ係数 $\mathfrak{Z}$-*ganz* ナル如キ $\mathfrak{p}_{z}$ ノ元ハ上記ノ形デ $K_1(z, u)$，$K_2(z, u)$ ノ係数 $\mathfrak{Z}$-*ganz* トナルコト定理15ノ証明ヨリワカル。ソコデ $\overline{\mathfrak{p}_{z}}$ ハ

$$\overline{K_1(z, u)}\, f(\overline{z}) + \overline{K_2(z, u)} \cdot \overline{\varphi(z, u)}$$

ナル形ノ元デ $\overline{\mathrm{I}}$ ニ属スルモノゝ集合ナルコトガワカル、コレハ明ニ $\mathfrak{p}'_{z}$ ニ属ス。

〔定理19〕 K ニ於テ m 乗シテ主類ニナル如キ因子類ノ数ヲ n_m トスルトキノ *ganz abgeschlossen* ナル如キ係数体拡大ニヨッテ n_m ハ小トナラズ。換言スレバ *geschlechttreu* ナ係数体縮少ヲ行ヘバ $\overline{K}$ ニ於ケル $\overline{n_m}$ ハ n_m ヨリ大トナラヌ。亦 K ガ *einfach separable* デ n_m ガ有限ナルトキ，$\overline{n_m} = n_m$ トナリ且ツ任意ノ部分体 k ニ関シ *Dimension* 有限ナル係数体ヲ *Restbild* ニ有スル如キ *geschlecht-treu* ナ係数体縮少存在スル。

〔証〕 係数体縮少ニヨッテ出来タ *Restbild* $\overline{K}$ ニ於テ m 乗シテ主類トナル如キ各因子類カラ Z ノ分母ニ素ナル因子 $\overline{\mathfrak{a}}^{(i)}$ ヲ一ツヅツ撰ビ出ス。$\overline{K}$ ニ於テ m 乗シテ *Haupt* ニナル因子ハ K ニ於テモ m 乗シテ *Haupt* ニナルカラ，$\overline{K}$ ニ於テ *Haupt* デナイ因子ガ K ニ於テモ *Haupt* デナイコトヲ証スレバイゝ。

次数 0 ナル $\overline{K}$ ニ於ケル Z ノ分母ニ素ナル因子 $\overline{\mathfrak{a}}$ ガ K ニ於テ *Haupt* ニナッタトスレバ K ニ於ケル $\mathfrak{a}$ ノ拡

大$\mathfrak{a}$ノ ganze Multipla ノ Dimension ハ1デアル。シカルニ$\overline{K}$ニ於ケル因子$\overline{\mathfrak{a}}$ニ對應スル$\overline{I}$ニ於ケル Ideal $\overline{\mathfrak{a}}_z$ ノ Modulbasis ニシテ Normalbasis ナルモノ a_i $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ トシ，ソノ Exponent ヲ $\overline{\lambda}_i$ トスル。$\mathfrak{a}$ニ対應スル Iニ於ケル Ideal $\mathfrak{a}_z$ ハ$\overline{I}$ニ於ケル$\overline{\mathfrak{a}}_z$ノ拡大デ a_i ハソノ Modulbasis デアル。

ソノKニ於ケル Exponent ヲλ_iトスル。$\overline{I}$ノ Modulbasis デ Normalbasis ナルモノ O_iガ亦Iノ Modulbasis デ Normalbasis トナリ O_iノ$\overline{K}$ニ於ケル Exponent ヲ$\overline{\omega}_i$，Kニ於ケル Exponent ヲω_iトスレバ$\overline{\omega}_i=\omega_i$

$$\sum \lambda_i \geqq \sum \omega_i - \text{Grad}\ \mathfrak{a}_z$$

$$\sum \overline{\lambda}_i = \sum \overline{\omega}_i - \text{Grad}\ \overline{\mathfrak{a}}_z$$

$\text{Grad}\ \mathfrak{a}_z = \text{Grad}\ \overline{\mathfrak{a}}_z$ デアリ，且ツ $a_i Z^{\lambda_i}$ ハ $\mathfrak{O}_\infty$ ニ属スルカラ $\lambda_i \geqq \overline{\lambda}_i$ デ $\sum\lambda_i = \sum\overline{\lambda}_i$ トナリ $\lambda_i = \overline{\lambda}_i$。

依ッテ a_i ハKニ於テモ Normalbasis トナル。ソコデ$\overline{\mathfrak{a}}$ノ ganze Multipla ノ Dimension

$$(\overline{\lambda}_1+1)+(\overline{\lambda}_2+1)+\cdots\cdots+(\overline{\lambda}_m+1)$$

ハ$\mathfrak{a}$ノ ganze Multipla ノ Dimension

$$(\lambda_1+1)+(\lambda_2+1)+\cdots\cdots+(\lambda_m+1)$$

ニ等シ。但シ$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots\lambda_m$ハ$\lambda_i$ノウチデ$\geqq 0$ナルモノデアル。ソコデ$\overline{\mathfrak{a}}$ノ ganze Multipla

ノ dimension 1 ダカラ, $\overline{\mathfrak{a}}$ ノ Hauptデアル。

次ニKニ於テ m 乗シテ主類ニナル各因子類カラ z ノ分母ニ素デ n ノ diskriminant ニ素ナ因子 $\mathfrak{a}^{(i)}$ ヲ一ツヅツ取リ出ス。因子 $\mathfrak{a}^{(i)}$ ニ含マレル素因子 $\mathfrak{p}^{(i,j)}$ デ割レル z ノ最低次ノ多項式 $f_{i,j}(z)$, u ノ多項式デ最低次ノ $\mathfrak{p}_z^{(i,j)}$ ニ属スルモノヲ $\psi_{i,j}(z, u)$ トス。

亦 $\mathfrak{a}^{(i)m} = (A^{(i)})$ ナルトキ是レ等 $f_{i,j}(z)$, $\psi_{i,j}(z, u)$ ノ $A^{(i)}$ ニ於ケルスベテノΛニ属スル係数ヲ含ム如キ k ニ関シ dimension 有限ナル係数体ヲ Restbild ニ有スル如キ geschlechtren ナ係数体縮少ヲトレバ $\mathfrak{a}^{(i)}$ ハ $\overline{K}$ ニ於ケル因子トナリ $\mathfrak{a}^{(i)m} = (A^{(i)})$ ニシテ m 乗スレバ $\overline{K}$ ニ於テ Haupt ニナル。亦カヽル $\mathfrak{a}^{(i)}$ ハ $\overline{K}$ ニ於テ互ニ同ジ因子類ニ属スルコトハナイ。ソコデ $\overline{n}_m \geqq n_m$ トナリ, 従ツテ $\overline{n}_m = n_m$ デアル。

〔定理20〕 Kハ einfach separable デ常数体Λノ任意ノ代数的拡大ニ関シ ganz abgeschlossen トスル。且ツΛハ代数数体ナルカ或ハアル部分体ニ関シ dimension 1 ナルモノトス。Kニ於テ m 乗シテ主類ニナル因子類ノ数有限ニシテ n_m トスルトキ, 常数体Λニアル有限次代数的拡大ヲ行ヒ, ソノ後適当ナル geschlechttren ナ Restbildung ヲ行ヘバ $\overline{n}_m \geqq n_m$ トナル。但シ $\overline{n}_m$ ハ $\overline{K}$ ニ於テ m 乗シテ主類ニナル因子類ノ数トス。

(証) Kノ m 乗シテ主類ニナル各因子類カラ, z ノ分母

ニ素ニシテ且ツ $\mathfrak{u}$ ノ Diskriminant ニ素ナル因子 $\mathfrak{a}^{(i)}$ ヲ一ツヅツ取出ス。

常数体 Λ ヲ適当ニ代数的ニ拡大シ geschlechtstreu ナ Restbildung ヲ適当ニ撰ベバ $\mathfrak{a}^{(i)}$ ガスベテ定理17ニ於ケル如キ abbildbar ナ因子トナル。シカシテ $\overline{\mathfrak{a}_z}^{(i)}$ モ m 乗シテ Haupt ニナリ，従ツテ 0 次ナル $\bar{\mathfrak{a}}^{(i)}$ ナル因子モ m 乗スレバ Haupt ニナル。

サテ $\dfrac{\mathfrak{a}_z^{(i)}}{\mathfrak{a}_z^{(j)}} = Q_z^{(i,j)}$ $(i \neq j)$ ハ K ニ於テ Haupt デナイガ，コノ Restbild $\overline{Q}_z^{(i,j)}$ ガ Haupt デナイコトヲ証スレバイヽ。$Q_z^{(i,j)}$ ノ Normalbasis a_ν ノ係数ガスベテ $\mathfrak{J}$-ganz ナル如ク Restbildung ヲ撰ンデオケバ，a_ν ノ Exponent ヲ α_ν トスルト

$$\sum \alpha_\nu = \sum \omega_\nu - \mathrm{Grad}\ Q_z^{(i,j)}$$
$$\sum \bar{\alpha}_\nu \leqq \sum \bar{\omega}_\nu - \mathrm{Grad}\ \overline{Q}_z^{(i,j)}$$

デアルカラ $\sum \alpha_\nu \geqq \sum \bar{\alpha}_\nu$ シカルニ $\overline{a_i}\, z^{\alpha_i}$ ガ $\overline{\mathfrak{o}_\infty}$ ニ属スルカラ $\bar{\alpha}_\nu \geqq \alpha_\nu$ デ $\bar{\alpha}_\nu = \alpha_\nu$ トナリ $\overline{a_i}$ ハ又ハリ $\overline{Q_z}^{(i,j)}$ ノ Normalbasis トナリ，$\overline{Q}^{(i,j)}$ ノ ganze Multipla ノ Dimension ハ $Q^{(i,j)}$ ノソレニ等シ。依ッテ $\overline{Q}^{(i,j)}$ モ Haupt デナイ。

（証終）

定理20ハモット詳細ナル形ニ述べ得ルガ，ソレハコヽデ述べナイ。定理20ニ於ケル Restbildung ノ撰ビ方

ガ m ニ depend スルコトノアルノハ注意ニ値スル。

例ヘバ Λ ガ代數數体デ K ハ示性數 1 ノ代數函數体ナルトキ，m ヲ割ルトコロノ Abbildungsideal ヲトレバ $\overline{K}$ ニ於ケル $\overline{n}_m$ ガ n_m ヨリ小トナルコトガアル。

(Hasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I. Crelles Journ. 175 (1936) 參照)

［定理41］ 標數 0 ナル任意ノ常數体 Λ ガ代數的ニ閉ヂテオルトキ $\Lambda(Z)$ ノ上ノ代數函數体 K ニ於ケル m 乘シテ Hauptklasse ニナル因子類ノ數 n_m ハ m^{2g} ニ等シ。但シ g ハ K ノ示性數トス。

(証) K ニ於テ m 乘シテ主類ニナル因子類ヲ有限個トリ，ソレカラ一ツヅツ Z ノ分母ニ素ナ且ツ $\mathfrak{W}$ ノ diskriminant ニ素ナ因子 $\mathfrak{a}^{(i)}$ ヲエラビ，コレラ $\mathfrak{a}^{(i)}$ ニ入ル素因子 次デ $z-a$, $n-b$ ガ割レルトスル。($a, b \subset \Lambda$)。

カヽル a, b ヲスベテ含ミ且ツ $\mathfrak{a}^{(i)m} = (A_i)$ ナルトキ A_i ノ Λ ニ屬スル係數ヲスベテ含ミ absolute dimension 有限ナル $\overline{\Lambda}$ ヲ係數体トスル如キ係數体縮少ヲ行ヒ $\overline{K}$ ガ出來ル。

サテ複素數体 Γ ヲトレバ，コレハソノ Primkörper ニ対スル Transzendenzgrad 無限デ alg. abg. デアルカラ $\overline{\Lambda}$ ニ同型ナ部分体 $\overline{\Lambda}^*$ ガ Γ ノウチニ

アル。$\bar{\Lambda}$ノ代リニ$\bar{\Lambda}^*$ヲトレバ$\bar{K}$ニ同型ナ$\bar{K}^*$ガデキル。サテ$\bar{\Lambda}^*$ヲ拡大シテΓトスレバ$\bar{K}^*\Gamma$ニ於ケル m 乗シテ主類ニナル如キ因子類ノ数ハ m^{2g^*} ナルコトガ知レテヰル。（但シ g^* ハ$\bar{K}^*\Gamma$ノ示性数ナリ）。

ソコデ $\mathfrak{a}^{(i)}$ ニ對應スル$\bar{K}^*\Gamma$ニ於ケル $\mathfrak{a}^{(i)*}$ ハ m 乗シテ Idanyit ニナリ，定理18ニヨリ互ニ同ジ因子類ニハ属セズ。ソコデ $m^{2g^*} \geqq n_m$ デアルカラ n_m ハ　　　　　　ノ際$\bar{K}^*\Gamma$ノ示性数 g^* ハ$\bar{K}$ノソレニ等シク，従ッテ K ノ g ニ等シ。n_m ハ有限デアルカラ $K \longrightarrow \bar{K}$ ナル係数体縮少ハ定理19ニ於ケル如キ $n_m = \bar{n}_m$ ナル如キモノトシテイヽ。

サテ定理19ニヨリ$\bar{K}^*\Gamma$ノ適當ナル係数体縮少ヲ行ヒ$\bar{\bar{K}}$ガ生ズルトキ$\bar{\bar{K}}$ニ於ケル m 乗シテ主類ニナル因子類ノ数ハ m^{2g} ニシテ係数体$\bar{\bar{\Lambda}}$ハ$\bar{\Lambda}^*$ノ上デ dimension 有限ナル如クシウル。

サテ定理20ニヨリ$\bar{\bar{\Lambda}}$ヲ有限次代数的ニ拡大シ，ソノ後適當ナル geschlechttren ナ$\bar{\Lambda}^*$ノ上ノ dimension 1 ノ Restbildung ヲ行フコトヲ繰リ返セバ$\bar{\bar{\Lambda}}$ノ Restbild ガ遂ニ$\bar{\Lambda}$トΛノ間ノ体ニ同型トナリ$\bar{\bar{K}}$ノ Restbild K_1 ハ$\bar{K}$ト K ノ間ノ体ニ同型ナル如クシ，且ツコノ際 K_1 ノ m 乗シテ主類ニナル因子類ノ数ハ m^{2g} ヨリ小ナラザル如クシ得ル。依ッテ $n_m \geqq m^{2g}$ トナリ従ッテ $n_m = m^{2g}$ デアル。

（証終リ）

ハノ標数キ0ナルトキハ n_m ニ関シ未ダ決定的ナ結果ガ得ラレズ。

——（未完）——