993. *Group ring* ノ表現トソノ *commutator algebra*

小菘 勝美 (東大)

此ノ談話ハ小平(邦)サンニ教ヘテ戴イタコトヲ少シ許リ整理シタモノデス。尚文理大ノ河田サンカラモ別ニ同ジ様ナ考ヘヲオ聞キシマシタ。

1. *Weyl* ノ *Classical groups* ノ第三章 B デハ *full linear group* ト *symmetric group* トノ関係ノ問題ヲ拡張シテ, 一般有限群ノ *group ring* トソノ一ツノ表現ノ *commutator algebra* トノ関係ヲ論ジテヰル。ソノ *main theorem* ハ次ノ通リデアッタ。

有限群 γ ノ *group ring* ヲ P (K ヲ係数トスル), ソノ *non-degenerate* ナ表現デ Γ, ソノ表現加群ヲ $\mathfrak{P}$, γ ノ *commutator algebra* —— 即チ γ ヲ作用團トシタトキノ $\mathfrak{P}$ ノ同型環ヲ $\mathfrak{A}$ トスルト, P ノアル *ideal* P_0 ニ含マレル左 *ideal* σ ト, $\mathfrak{P}$ ノ $\mathfrak{A}$-*invariant subspace* Σ トノ間ニ次ノヤウナ一對一ノ對應ガ存在スル, 即チ

$$\left.\begin{array}{l} \sigma \longrightarrow \sharp\sigma = (f;\ f_i(\cdot) \in \sigma) \\ \Sigma \longrightarrow \natural\Sigma = (\sum_{i,\alpha} \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot);\ f^{(\alpha)} \text{ハ} \Sigma \text{ノ} basis) \end{array}\right\} (1)$$

トスルト $\natural\sharp\sigma = \sigma$, $\sharp\natural\Sigma = \Sigma$ トナリ, ソノ上

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2 \longleftrightarrow \Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$$

$$\sigma_1 \supset \sigma_2 \longleftrightarrow \Sigma_1 \supset \Sigma_2$$

$$\sigma_1 \cong \sigma_2 \longleftrightarrow \Sigma_1 \cong \Sigma_2$$

ガ成立スル. コヽニ $\sigma \longleftrightarrow \Sigma$, $\sigma_i \longleftrightarrow \Sigma_i$ トスル. 尚ホ $P_0=qP$ デアル.

Weyl ノ證明ハ難シイコトヲ使フワケデハナイガ, 餘リ解リヨクナイ。ソレハ (1) ノ對應ガ面倒ナタメデアルガ, コノ對應ハ Weyl ノ證明ノ途中ニモ注意サレ, 且ツ利用サレテヰルヤウニ, モット分リヨイ形ニ直スコトガ出來ル. ($\hat{e}$ ガ σ ノ generating idempotent ナルトキ, 并 $\sigma=eP$ トナルコトニ注目スルノデアル) ソノ新シイ對應ノサセ方ニヨレバ, 上ノ定理ハ簡單ニ證明サレル. ソシテ實際ニコノ定理ヲ, 應用スルニ當ッテハ, ソノ形デ差支ヘナイト思ハレル。尚新シイ對應ノサセ方ガ (1) ト一致スルコトモ比較的容易ニ證明サレル。

2. 完全可約デ 1 ヲ持ツ matric algebra ノ commutator algebra ハ矢張リ完全可約デ, ソノ又 commutator algebra ハモトノ algebra ト一致スル。

此ノ定理ハ Weyl ノ本デハ p.95 ニ出テヰルカラ, 之レヲ使ウ (Weyl ノ方法デハ之ヲ使ッテヰナイコトハ注目ニ價スル). group ring P ハ完全可約ダカラ, ソノ non-degenerate ナ表現 γ ハ完全可約デアル. 勿論 1 ヲ持ツ. 故ニ上ノ定理デソノ commutator algebra $\mathfrak{a}$ ハ完全可約デ 1 ヲ持チ, ソノ又 commutator algebra ハモトノ $\mathfrak{r}$ ニ一致スル．即チ $\mathfrak{r}$ ハ $\mathfrak{o}$ ヲ operator トシタトキノ P ノ linear transformation ノナス ring デアル．ソコニ注目シテ次ノ一般的ナ定理ヲ証明スル。

定理1. $\mathfrak{o}$-K加群 $\mathfrak{M}$ が完全可約（$\mathfrak{o}$ ヲノ），$\mathfrak{M}$，$\mathfrak{o}$-automorphism ノ ring ヲ $\mathfrak{r}$ トスルト $\mathfrak{r}$ ノ右 ideal $\mathfrak{v}$ ト $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{o}$-subspace $\mathfrak{m}$ トノ間ニハ次ノ對應デ一對一ノ關係が成立スル。

$$\mathfrak{v} \longrightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{v}\mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{v} = (a\,;\ a\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{m}) \longleftarrow \mathfrak{m}$$

ソシテ $\mathfrak{v} \longleftrightarrow \mathfrak{m}$, $\mathfrak{v}_i \longleftrightarrow \mathfrak{m}_i$ トスルト

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 \longleftrightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$$

$$\mathfrak{v}_1 \supseteq \mathfrak{v}_2 \longleftrightarrow \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_2$$

$$\mathfrak{v}_1 \cong \mathfrak{v}_2 \longleftrightarrow \mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2$$

（Fitting: Dissertation Satz 8 又ハ Math. Ann. 107 参照）

コノ定理ハ見掛ケ上次ノ様ニ一般ナ形ニナルが，ソノ方が証明ニ便利デアル。

定理1a. 二ツノ完全可約ナ $\mathfrak{r}$-K加群（$\mathfrak{r}$ ヲノ）$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ がアル．$\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{r}$-automorphism 全体ヲ $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{r}$-automorphism ノ全体ヲ $\mathfrak{s}$ トスルト，$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ハ夫々 $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{s}$ ヲ operator トシタ場合 parallel ナ構造ヲ持ツ．即チ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ノ invariant subspace ヲ夫々 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ トスルトキ

$$\mathfrak{m} \to \mathfrak{n} = \mathfrak{r}\mathfrak{N} \qquad \mathfrak{r} = (a\,;\, a\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{m}) \tag{2}$$

$$\mathfrak{n} \to \mathfrak{m} = \mathfrak{r}'\mathfrak{M} \qquad \mathfrak{r}' = (a\,;\, a\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{n}) \tag{3}$$

デ $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ ハ一對一ニナリ, 且ツ直和ハ直和ニ isomorphic ナモノハ isomorphic ナモノヘト對應スル。

（證明）先ヅ一對一ナルコト. $\mathfrak{M}$ ハ完全可約ダカラ $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}'$ ナル $\mathfrak{m}'$ ガアル. コノ直分解デ $\mathfrak{M} \ni m = m_1 + m'$ トスルト, projection: $m \to m_1$ ハ明カニ $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{o}$-automorphism デアル. 之ヲ e トカケバ $m_1 = em$, $e \in \mathfrak{r}$ デアル. スルトコノ e ヲ使ッテ(2)ハ

$$\mathfrak{m} = e\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{n} = e\mathfrak{N} \tag{2'}$$

トカケル. (ソレニハ $e\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$ ヲ示セバヨイ: $e\mathfrak{r}\mathfrak{M} = e\mathfrak{M} = \mathfrak{m}$, 又 $a\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{m}$ ナラドンナ $m \in \mathfrak{M}$ ニ對シテモ $am \in \mathfrak{m}$ $\quad\therefore\ eam = am \quad$ i.e. $ea = a$, $\therefore\ a \in e\mathfrak{r}$)

ソシテ(2')ニ於テ e ハ $\mathfrak{N} \to e\mathfrak{N}$ ナルーツノ projection デアル ($\mathfrak{N} = e\mathfrak{N} + (1-e)\mathfrak{N}$). 故ニ(2), (3)ガ symmetric ナルコトニ注意スレバ, 我々ノ對應ガ一對一ナル事ガワカル。

定理ノ後半. 假定ガ symmetric ダカラ, 何レカ一方ノ方向ダケヲ證明スレバヨイ. $\mathfrak{m} \to \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}_i \to \mathfrak{n}_i$ トシヨウ。

$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ ナラ projection ヲ用ヰテ
$e\mathfrak{M} = e_1\mathfrak{M} + e_2\mathfrak{N}$, $e = e_1 + e_2$, $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ トカケル. $\therefore\ e\mathfrak{N} = e_1\mathfrak{N} + e_2\mathfrak{N} \quad \therefore\ \mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$

完全可約ダカラ $\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2 \longrightarrow \mathfrak{n}_1 \cong \mathfrak{n}_2$ ハ上カラ明カ.

最後ニ $\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2$ ナラ $\mathfrak{m}_1 = e\mathfrak{M}$ トスルトキ $\mathfrak{m} \to e\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$, トシ又 $\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2$ デ $\mathfrak{m}_1 \longrightarrow \mathfrak{m}_2$ トスルト, コノ二ツヲ組合セタ $\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}_2$ ハ明カニ $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{o}$-automorphism デアル. 之ヲ a トシヨウ. $a \in \mathfrak{r}$. スルト $a\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ 即チ $ae\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_2$. 之レカラ對應スル $\mathfrak{N}$ ノ subspace ニ移レバ $ae\mathfrak{N} = \mathfrak{n}_2$. 然ルニ $e\mathfrak{N} = \mathfrak{n}_1$ $\therefore\ a\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2$ 故ニ $\mathfrak{n}_1 \cong \mathfrak{n}_2$ q.e.d.

定理1a デ $\mathfrak{N}$ トシテ $\mathfrak{r}$ ヲ考ヘルコトガ出来ル. $\mathfrak{r}$ ヲ左カラノ operator ト考ヘタトキ, ソレト commutative ナ linear transformation ノ全体ハ則チ右カラノ operator ト考ヘタ $\mathfrak{r}$ 自身ニ外ナラナイ. 故ニ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$-subspace ニ相當スルモノハ $\mathfrak{r}$ ノ右 ideal デアル. 故ニ定理1ガ証明サレタコトヽナル。

實ハ定理1ト1aトハ殆ンド同ジコトデアル. 実際定理1カラ容易ニ1aヲ出スコトガ出来ルコトハ明デアル。

扨テ定理1ヲ我々ノ場合ニ應用スレバ, ρ ノ表現ナル $\mathfrak{r}$ ノ右 ideal ト P ノ $\mathfrak{o}$-subspace Σ トノ間ノ parallelism ガワカッタコトヽナル. $\rho \longrightarrow \mathfrak{r}$ ニ於テ $\rho^0 \longrightarrow (0)$ トスルト ρ^0 ハ ρ ノ ideal, ρ ハ完全可約ダカラ, $\rho = \hat{\rho}_0 + \rho^0$ ナル ideal $\hat{\rho}_0$ ガキマル. (^ハ ρ ノ元 $\sum a(s)s$ ヲ $\sum a(s)s^{-1}$ ヘ移ス inverse automorphism トスル. ワザワザ $\hat{\rho}_0$ トシタノハ結果ヲ奇麗ニスルタメ――又 Weyl ノ記号ト合セルタメデアル)

ソシテ $\hat{P}_0 \cong \mathfrak{r}$, コノ $\cong$ ハ $\hat{P}_0$ ヲ $a \to U(a) \in \mathfrak{r}$ デ與ヘラレル. ソコデ次ノ定理ヲ得ル。

定理2. $\hat{P}_0$ ノ右 ideal $\hat{\sigma}$ ト P ノ $\mathfrak{r}$-subspace Σ トノ間ニハ

$$\hat{\sigma} \longrightarrow \Sigma = \hat{\sigma} P$$

ニヨッテ定理1ノ型ノ1-1對應ガ成立スル。

尚、$\hat{P}_0 \longleftrightarrow P$, $(0) \longleftrightarrow (0)$ ヨリ

系1. $P = \hat{P}_0 P$ (4)

系2. $(0) = (a \,;\, aP = (0))$ (5)

Roof operation デ $\hat{P}_0$ ノ右 ideal $\hat{\sigma}$ ハ P_0 ノ左 ideal σ ニ一對一ニ移ルカラ

定理2a. P_0 ノ左 ideal σ ト P ノ $\mathfrak{r}$-subspace Σ トノ間ニハ

$$\sigma \longrightarrow \Sigma = \hat{\sigma} P \qquad (6)$$

デ定理1ノ型ノ1-1對應ガ成立スル。

此ノ定理2aヲ基本定理トシテ Weyl ノ本ノ第四章ノ問題ヲ論ズルコトガ出来ルシ, 又 symmetric group ノ character ト full linear group ノ character ノ一方カラ他ノ一方ヲ導キ出ス問題等ヲ論ズルコトガ出来ル。

3. 最後ニ定理2aノ P_0 ガ Weyl ノ方法デノ P_0 ト一致シ, σ ト Σ トノ對應ノサセ方ハ両者同一ナルコトヲ証明シヨウ。ソノタメニハ Weyl ノ本ノ p.106 ノ lemma ヲ使フガ, ソノ中デモ簡單ナ A, B ダケヲ用ヰレバ十分

デアル。

証明スベキコトハ

(i) 定理 2a ノ ρ_0 ガ Weyl ノ ㄅP ト一致スルコト: $\rho_0 = ㄅP$.

(ii) 定理 2a ノ意味デ $\sigma \to \Sigma$ トスルト $\Sigma = \#\sigma$.

(iii) 定理 2a ノ意味デ $\Sigma \to \sigma$ トスルト $\sigma = ㄅ\Sigma$

ノ三ツデアル。

(ii) ヲ先ヅ証明スル。コノトキ σ ハ ρ ノ勝手ナ左 ideal トシテ証明スレバ十分デアル。$\Sigma \subseteq \#\sigma$: $g \in \Sigma$ トスルト $g = af$, $a \in \hat{\sigma}$ $\therefore$ $g(\cdot) = f(\cdot)\hat{a}$ $\hat{a} \in \sigma$, (lemma B). σ ハ左 ideal ナル故 $g(\cdot) \in \sigma$ 即チ $g \in \#\sigma$ デアル。

逆ニ $\#\sigma \subseteq \Sigma$ ノ方: $f \in \#\sigma$ トスルト $f(\cdot) \in \sigma$, σ ノ idempotent ヲ $\hat{e}$ (i, e, $\sigma = \rho\hat{e}$) トスルト $f(\cdot) = f(\cdot)\,\hat{e}$, lemma B デ $f = ef$, $e \in \hat{\sigma}$ $\therefore$ $f \in \Sigma$

(i) ノ証明。 (4) ニヨリ $P = \hat{\rho}_0 P$ $\therefore$ $f \in P$ ナラ $f = \hat{a}g$, $a \in \rho_0$. 故ニ lemma B デ $f_i(\cdot) = g(\cdot)a \in \rho_0$. $\therefore$ $ㄅP \leq \rho_0$. ㄅP ハ左 ideal デアル (lemma A) $ㄅP = \sigma'$ トカカウ. ρ_0 ハ完全可約ダカラ $\rho_0 = \sigma' + \sigma''$ $\therefore$ $\hat{\rho}_0 P = (\hat{\sigma}' + \hat{\sigma}'')P = \hat{\sigma}'P + \hat{\sigma}''P$.

(ii) ニヨリ $\hat{\sigma}'P = \#\sigma' = \#ㄅP \geq P$ $\therefore$ $\hat{\sigma}'P = P$ 故ニ當然 $\hat{\rho}_0 P = P$ デ從ッテ $\hat{\sigma}''P = (0)$ トナル。(5) ニヨリ $\hat{\sigma}'' = (0)$, $\sigma'' = 0$ 故ニ $\rho_0 = \sigma' = ㄅP$ ヲ得ル。

(iii) ノ証明．Σ ハ定理 2a デ $\hat{\sigma}P$ トカケルノデアルカラ，$ㄣ\hat{\sigma}P = \sigma$ ヲ証明スレバヨイ。

$ㄣ\hat{\sigma}P \subseteq \sigma$ ノ方：　$a \in ㄣ\hat{\sigma}P$ ナラ　$a = \sum_{i,\alpha} \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot)$,

$f^{(\alpha)}$ ハ $\hat{\sigma}P$ ノ basis．故ニ $\hat{\sigma}$ ノ idempotent ヲ e トスレバ　$f^{(\alpha)} = ef^{(\alpha)}$ ダカラ

$$a = \sum \varphi_i^{(\alpha)} (ef^{(\alpha)})_i(\cdot) = \sum \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot)\, \hat{e}$$

(lemma B)

然ルニ $\hat{e}$ ハ σ ノ idempotent ダカラ $\in \sigma$

次ニ $\sigma \subseteq ㄣ\hat{\sigma}P$ ヲ示ス．$a \in \sigma$ トシヨウ．(i) ニヨリ $\sigma \subseteq ㄣP$，故ニトニカク $a = \sum \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot)$ トカケル．σ ノ idempotent ヲ $\hat{e}$ トスレバ

$$a = \sum \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot)\, \hat{e} = \sum \varphi_i^{(\alpha)} (ef^{(\alpha)})_i(\cdot)$$

(lemma B)

e ハ $\hat{\sigma}$ ノ idempotent generator ダカラ

$ef^{(\alpha)} \in \hat{\sigma}P$,　$\therefore\ a \in ㄣ\hat{\sigma}P$.

q. e. d.

—— 終リ ——