

987. 前談話 985 = 就テ

河田 敬義 (東京文理大)

可換環デ $a^2 \geq 0$ が他ノ條件カラ導ケルコトハ、例ヘ
 Diendonné (Annals, vol. 42, p. 551) = ヲ
 レ心次ノ x ヲ = 出来ル。先ツ $x \geq 0$ 又ハ $x \leq 0$ 十ヲバ $x^2 \geq 0$.
 次ニ $x \geq 0$ 十ヲバ $xy = xy_+ - xy_-$. 然ルニ
 $xy_+ \wedge xy_- \leq \|x\| (y_+ \wedge y_-) = 0$,
 故ニ $(xy)_+ = (xy_+ - xy_-) \vee 0 = (xy_+ \vee xy_-) - xy_-$
 $= xy_+$, 同様ニ $(xy)_- = xy_-$, 従ツテ $|xy| = x|y|$
 トナル。一般ニ $|xy| \leq |xy_+| + |xy_-| = |x|y_+ + |x|y_-$
 $= |x||y|$. 逆ニ $|xy| \geq |x^+y - x^-y| \geq |x_+y| - |x_-y|$
 $= |x_+|y| - |x_-|y| = |x||y| = |x||y|$, 即チ
 $|xy| = |x||y|$ トナル。特ニ $|x|x| = |x|^2$ カラ
 $|x|x| = |x_+^2 - x_-^2| \leq x_+^2 + x_-^2 \leq (x_+ + x_-)^2 = |x|^2$
 ト比ベテ $x_+ \cdot x_- = 0$ トナル。故ニ $x^2 = x_+^2 + x_-^2 = |x|^2$
 ≥ 0 が成立スル。

(以上)