983. Lattice ordered group ニツイテノ二三ノ注意

中山　正（阪大）

Lattice ordered abelian group（可換束群）特ニ vector lattice ハコノ紙上デモ度々論ゼ

ラレタ。以下可換性ヲ假定シナイ束群ニツイテ簡單ナ考察ヲシテ見マス。

先ヅLorenzenノ例ノ論文（前談話參照）ノ可換束群（§3）ニツイテノ基本定理（Satz 11）ガトモカク可換デナイ一般ノ束群ニツイテモ成立スルコトヲ注意シマス。但シソレヲClifford（前談話參照）式ニinterpreteスルコトハ一般ニハ出來ナクテ困リマス。然シコノ結果ヲ使ッテ任意ノ束群ハ（束トシテハ）distributiveデアルコトガ證明出來マス。

コノコトハ可換束群ニツイテハスデニDedekindガ證明シ（ソノ證明ハ中野氏ノト同ジデアリマス），更ニFreudenthalニヨッテモ證明サレタワケデスガ，ソレラノ證明ハ可換性ヲ使ッテヰルト思ヒマス。更ニ，弱最大條件（weak (= conditional) maximal condition）ヲミタス束群ハ簡單デアッテ實ハ可換ナ束群ニナリマス。

コノ最后ノコトノ本質的ナ所ハ，非可換多元環ノいでやる論（Artin，淺野氏輯報（昭和十四年）論文ヲモ參照），非可換多項式域（Ore），非可換半群ノいでやる論（河田－伊藤氏，輯報昭和十四年）ニオケル兩側いでやるノ可換性ノ中ニ含マレテヰルワケデアリマセウ。（マタソレヲ含ンデモヰルワケデセウ）。トモカクG. Birkhoffノ「complete（conditionallyノ意デセウ）lattice ordered groupハ常ニ可換デア

ラウ」トイフ豫想(角谷氏ノ吉田氏ヘノ来信ニヨル)ノ非常ニ sepacial ナ、ソシテ余リニ易シイ case デアルワケデス。

サテ、コヽニ束群(lattice-ordered group)トハ群デ,ソシテ束デアリ $a \geqq b \longrightarrow ca \geqq cb,\ ac \geqq bc$ トイフ條件ヲミタスモノヲ云フコトニシマス。從ッテ $\cup$ ヤ $\cap$ ガ両側ノ乗法デヤハリ保存サレル。

束群 $\mathfrak{G}$ ノ単位元ヲ 1 トシマス。$a \leqq b$ トハ $ab^{-1} \leqq 1$ ナルコト,マタ $b^{-1}a \leqq 1$ ナルコト、ニ同値デアリマス,マタソレハ $a^{-1} \geqq b^{-1}$ ニ同値デアル。今 $a \leqq 1$ ナル元 a ヲ ganz ナリトヨビ、ソノ集合ヲ $\mathfrak{O}$ デ表ハス。$\mathfrak{O}$ ハ束ノ意味デノ $\mathfrak{G}$ ノ束いでやる(Stone ノ意味ノ)デアリ、マタ $\mathfrak{G}$ ノ部分半群(semi-group)デアル。マヅ Lorenzen ノ論文ノ §3 ノ考察ガ我々ノ可換デナイ場合ニモ少シノ modification デ類似出来ルコトカラ始メマス。(實ハ他ノ §§ モ然ウデスガ,今我々ハ單ニ partially ordered デナク lattice-ordered ノ場合デスカラ §3 ノミヲ問題ニシマス。

他ノ §ニツイテモ,イヅレ触レル機會ヲモチタイト思ヒマス) 單ニ非可換性ニ注意シツヽ適且 modify シテ行ケバヨイノデスガ、念ノタメ、ソシテ Lorenzen ノ紹介(ナドシナクテモ良イノカモ知レマセンガ)ノ意味モフクメテ、ナルベク束論的言葉(いでやる論的デナク)ヲ使ッテ書イテミマス。

マヅ，任意ノ元 c ニ対シテ $c\mathfrak{o} = \mathfrak{o}c$ （$\mathfrak{o}$ ハ ganz ナ元ノ全体）ハ明カデス。

<u>s-ideal</u> トハ上カラ bounded ナ集合 $\mathfrak{a}$ デシカモ $\mathfrak{o}\mathfrak{a}\mathfrak{o}(=\mathfrak{a}\mathfrak{o}=\mathfrak{o}\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$ ナルモノトスル．コノ第二ノ條件ハ $\mathfrak{a}$ ガ束論ノ意味デ M-closed ナルコトデモアル。マタ <u>t-ideal</u> トハヤハリ上カラ bounded ナ集合 $\mathfrak{a}$ デ而モ束 G ノ束いでやるナルモノトスル。（t-ideal ハ勿論一ツノ s-ideal デアル）．s- 又ハ t-ideal $\mathfrak{a}$ ガ $\subseteq \mathfrak{o}$ ナルトキ ganz トイフ．ganz ナ s- 又ハ t-ideal $\mathfrak{z}$ ガ <u>prime</u> デアルトハ

$$a \notin \mathfrak{z},\quad b \notin \mathfrak{z} \longrightarrow ab \notin \mathfrak{z}$$

ナルコトヲイフ．（コヽニ a, b トシテハ $\mathfrak{o}$ ノ元ニカギッテモヨイコトハ容易デアル）

（$\mathfrak{z}$ ガ prime ナル（t- 又ハ s-）ideal ノトキ，$a \notin \mathfrak{z}$, $b \notin \mathfrak{z}$ ナラ勿論 $a \frown b \notin \mathfrak{z}$ デモアル．何者：$a \frown b \geqq ab$．故ニ $\mathfrak{z}$ ハ束ノ意味デノ prime 性ヲモモッテキル）

$\mathfrak{z}$ ガ s-<u>Primideal</u> ナルトキ <u>quotient semi-group $\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}$</u> ヲ ac^{-1} （$a \in \mathfrak{o}$, $c \in \mathfrak{o}-\mathfrak{z}$；$-$ ハ complement ノ意）ナル形ノ元ノナス集合トスル．コヽニ $ac^{-1} = c^{-1} \cdot cac^{-1} = c^{-1}a$ ダカラ $\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}$ ハ $c^{-1}a$ （$a \in \mathfrak{o}$, $c \in \mathfrak{o}-\mathfrak{z}$）ノナス集合トイッテモヨイ！

サテ, $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ハ（$\mathfrak{P}$ ガ prime ナルコトカラ）semi-group ヲナス。何者:

$$a_1c_1^{-1}\cdot a_2c_2^{-1} = a_1(c_1^{-1}a_2c_1)\cdot c_1^{-1}c_2^{-1}$$
$$= a_1(c_1^{-1}a_2c_1)\cdot(c_2c_1)^{-1}$$

デアリ、コヽニ a_1, a_2 ト同時ニ $a_1(c_1^{-1}a_2c_1)$ ハ $\mathfrak{O}$ ニ属シ、マタ c_1, c_2 ト同時ニ c_2c_1 ハ $\mathfrak{O}-\mathfrak{P}$ ニ属スルカラデアル）。（從ニ $\mathfrak{O}$ ヲフクム semi-group ($\subseteq \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$) ハコノ様ニシテ得ラレルコトモ可換ノ場合ト同様デスガ、使ヒマセンカラ省略シマス）。更ニ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ハ束 $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ノ束いでやるデモアル。何故ナラ, $d = c_1 \frown c_2$ トスレバ上述ノ如ク d モ $\mathfrak{P}$ ニ属サス。而シテ

$$a_1c_1^{-1} \cup a_2c_2^{-1} = a_1c_1^{-1}d\cdot d^{-1} \cup a_2c_2^{-1}d\cdot d^{-1}$$
$$= (a_1(c_1^{-1}d) \cup a_2(c_2^{-1}d))d^{-1}$$

コヽニ $c_1^{-1}d$, $c_2^{-1}d \leqq 1$ ダカラ（　　）ノ中ハ $\mathfrak{O}$ ニ属スル. ヨッテ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ハ $\cup$ ヲ閉ヂテ居リ、束いでやるデアル。

次ニ、$\mathfrak{P}$ ガ單ニ S デナク <u>t-Primideal ナラバ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ハ linear デアル</u>（任意ノ元 c ニ対シテ, c カ c^{-1}, イヅレカハ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ニ属スルコト）. ソノタメ, 先ヅ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ノ Nichteinheit, スナハチ $f \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ダガ $f^{-1} \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ナル元 f ハ pc^{-1} ($\underline{p \in \mathfrak{P}}$, $c \in \mathfrak{O}-\mathfrak{P}$) ナル形ノ元デアル.（証明容易. コヽニ $c \in \mathfrak{O}-\mathfrak{P}$ ナラ $c\mathfrak{P} = \mathfrak{P}c$ ナルコトニ注意, 後述参照）而シテニッノ Nichteinheiten $p_1c_1^{-1}$, $p_2c_2^{-1}$ ニ対シテ

$$p_1c_1^{-1} \cup p_2c_2^{-1} = (p_1(c_1^{-1}d) \cup p_2(c_2^{-1}d))d^{-1}$$

$(d = c_1 \cap c_2)$

モマタ $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ノ Nichteinheit デアル. 何者, $d \neq \mathfrak{p}$ デアリ、且ツ (　　　　) ノ中ハ $\mathfrak{p}$ ガ t-ideal ナルコトニヨリ再ビ $\mathfrak{p}$ ノ元デアルカラデアル。(コノ辺 Lorenzen ノヲ Ore ノ<u>非可換</u>多項式論的ニ少シ modify シマシタ)

然ルニ, 任意ノ $c \in \mathfrak{g}$ ニ対シテ

$$(1 \cup c)^{-1} \cup (1 \cup c^{-1})^{-1} = 1$$

デアル。(コレハ c, c^{-1}, 1 ガ、従ッテソレラノ $\cup$, $\cap$ ガ互ニ可換ナルニヨリ可換ノ場合ト同ジデアル). 故ニ上記ニヨリ $\mathfrak{o}$ ノ元 $(1 \cup c)^{-1}$, $(1 \cup c^{-1})^{-1}$ ノドチラカハ $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ノ Nichteinheit デアル. 即チ $1 \cup c$ カ $1 \cup c^{-1}$ ノドチラカハ $\in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ デアル。即チ c カ c^{-1} ノドチラカハ $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ニ属スル。故ニ $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ハ linear デアル。

次ニ, Krull ニ従ッテ, <u>maximal ナ t-ideal $\mathfrak{p}$ ハ常ニ prime デアル</u>. 何者、$\mathfrak{p}$ ニ属サヌ $\mathfrak{o}$ ノ二元 a_1, a_2 ニ對シテ, $\mathfrak{p}$ ト a_i ($i = 1$ 又ハ 2) ヲフクム最小ノ t-ideal ハ假定ニヨリ $\mathfrak{o}$ ト一致シテシマウカラ

$$p_i \cup a_i \ (\geqq \text{従ッテ}) = 1$$

ナル点 $p_i \in \mathfrak{p}$ ガアル. 然ラバ

$$1 = (p_1 \cup a_1)(p_2 \cup a_2)$$
$$= p_1 p_2 \cup p_1 a_2 \cup a_1 p_2 \cup a_1 a_2$$

コヽデ, ハジメノ三項ハ $\mathfrak{p}$ ニ属スルカラ $a_1 a_2 \neq \mathfrak{p}$

デナケレバナラヌ．故ニ$\mathfrak{p}$ハprimeデアル。

然ルニ，任意ノt-ideal $\mathfrak{a}(\subset\mathfrak{O})$特ニ$\mathfrak{a}_0$（$a$ハ$\mathfrak{O}$ノNichteinheit）ヲフクムmaximalナt-idealガアルコトハ明カデアル。而シテcヲ$\mathfrak{O}$ニ属サヌ任意ノ元トスレバ$1\cup c$モ勿論然リ．故ニ$(1\cup c)^{-1}$ヲフクムmaximal，従ツテprimeナt-ideal $\mathfrak{p}$ガアル．而シテ$c\notin\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$．何者$c\in\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ナラ（$1\in\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ダカラ）$1\cup c$モ$\in\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$，即チ$(1\cup c)^{-1}\notin\mathfrak{p}$ダカラデアル．ヨッテ任意ノ$c\notin\mathfrak{O}$ニ対シテ$c\notin\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ナルmaximal t-Primideal $\mathfrak{p}$ガ必ズアル．ヨッテLorenzenノSatz 11ニ相当シテ

<u>定理．$\mathfrak{R}$ヲ$\mathfrak{O}$ノmaximal t-Primidealノ全体トスレバ</u>

$$\mathfrak{O}=\bigcap_{\mathfrak{R}}\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$$

<u>デアル．</u>

サテ，一般ニアルprimeナs-ideal $\mathfrak{p}$ニツイテ$\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ヲ考ヘル．而シテ

$$ab^{-1}\in\mathfrak{O}_\mathfrak{p}\text{ ナルトキ }a\leqq(\mathfrak{p})\,b$$

ト定義スル．（注意．$b^{-1}a\in\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$トハ一般ニ同値デナイ）

然ラバ，$a\leqq(\mathfrak{p})\,a$デアリ，マタ$a\leqq(\mathfrak{p})\,b$，$b\leqq(\mathfrak{p})\,c$ナラ$a\leqq(\mathfrak{p})\,c$ナルコトハ明カ（$ac^{-1}=ab^{-1}\cdot bc^{-1}$）。特ニ$a\leqq(\mathfrak{p})\,a'$且ツ$a\geqq(\mathfrak{p})\,a'$ナ

ル関係ハ同値関係デアリ、コレニヨル類ヲ考ヘ，a ノ属スル類ヲ $a(\mathfrak{z})$ デ表ハス．類ノ集合ヲ $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ デ表ハス．シカシテ $a \leqq (\mathfrak{z})\, b$ ナルトキ $a(\mathfrak{z}) \leqq b(\mathfrak{z})$ トオケバ（コレハ代表元ノトリ方ニ無関係デアリ）$\Gamma_{\mathfrak{z}}$ ハコレニヨリ partial order ヲ与ヘラレル。シカシテ $a \leqq b$ ナラ $ab^{-1} \in \mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}_{\mathfrak{z}}$ ダカラ $a(\mathfrak{z}) \leqq b(\mathfrak{z})$ ニヨル．カク $\mathfrak{G}$ ヨリ $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ ヘノ mapping $a \rightarrow a(\mathfrak{z})$ ハ order ヲ保存スルが、更ニ $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ ハ実ハ lattice デシカモコノ mapping が $\cup$ ヤ $\cap$ ヲモ保存スル．何故ナラ：

$a \cup b \geqq a, b$ ダカラ $(a \cup b)(\mathfrak{z}) \geqq a(\mathfrak{z}), b(\mathfrak{z})$ ハ明カ．然ルニ $x(\mathfrak{z}) \geqq a(\mathfrak{z}), b(\mathfrak{z})$ ナラバ $ax^{-1}, bx^{-1} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{z}}$．故ニ $ax^{-1} \cup bx^{-1} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{z}}$ 即チ $(a \cup b)x^{-1} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{z}}$，$(a \cup b)(\mathfrak{z}) \leqq x(\mathfrak{z})$.

故ニ $(a \cup b)(\mathfrak{z})$ ハ $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ ニオケル $a(\mathfrak{z}), b(\mathfrak{z})$ ノ join $\cup$ ニナル．

マタ $a \cap b \leqq a, b$ カラ $(a \cap b)(\mathfrak{z}) \leqq a(\mathfrak{z}), b(\mathfrak{z})$ ハ明カ．然ルニ $y(\mathfrak{z}) \leqq a(\mathfrak{z}), b(\mathfrak{z})$ ナラバ $ya^{-1}, yb^{-1} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{z}}$，故ニ $ya^{-1} \cup yb^{-1} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{z}}$ 即チ $y(a^{-1} \cup b^{-1}) = y(a \cap b)^{-1} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{z}}$．故ニ $y(\mathfrak{z}) \leqq (a \cap b)(\mathfrak{z})$．故ニ $(a \cap b)(\mathfrak{z})$ ハ $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ ニオケル $a(\mathfrak{z}), b(\mathfrak{z})$ ノ meet $\cap$ デアル。

ヨッテ $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ ハ lattice デアリ，$a \rightarrow a(\mathfrak{z})$ ハ $\mathfrak{G}$ ヨリ $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ ヘノ lattice homomorphism デアル。

サテ：特ニ $\mathfrak{p}$ ガ prim ナ t-ideal ノトキ $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ ハ linearly ordered デアル．ナゼナラ ab^{-1} カ $ba^{-1}=(ab^{-1})^{-1}$ ノ少クモ一方ハ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ ニ属スルカラデアル。

然ル上ニ得タ定理ハ

$$x \longrightarrow (\cdots\cdots, x(\mathfrak{p}), \cdots\cdots) \quad (\mathfrak{p}\text{ ハ }\mathfrak{F}\text{ヲウゴク})$$

ニヨッテ $\mathfrak{O}$ ノ元 x ト $\cdots\cdots \times \Gamma_{\mathfrak{p}} \times \cdots\cdots$ ナル $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ ノ直積ノ元ノ間ニ一對一ナ對應ヲ與ヘラレルコトヲ示ス．何故ナラ $a \neq b$．タトヘバ $a \not\equiv b$ トスレバ $ab^{-1} \not\in \mathfrak{o}$．故ニ $ab^{-1} \not\in \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ スナハチ $a(\mathfrak{p}) \neq b(\mathfrak{p})$ ナル $\mathfrak{p}$ ガアルカラデアル。

然モ上ノ考察ハ $\mathfrak{O}$ ニ於ケル join ト meet ハ componentwise ニ $\cup$ ト $\cap$ ヲトッタモノニ對應スルコトヲ示ス．スナハチ束トシテノ tren ナ表現デアル然ルニ $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ ハ linearly ordered．故ニ $\mathfrak{O}$ ガ distributive ナルコトハ明カデアル。

次ニ，上ニ $a \equiv (\mathfrak{p})\, b$ ナル関係ヲ考ヘタガ、コノ場合任意ノ c ニ対シテ $ac \equiv (\mathfrak{p})\, bc$ デモアル ($ac(bc)^{-1} = ab^{-1}$)．シカシ $ca \equiv (\mathfrak{p})\, cb$ トハカギラナイ．コレト同ジコトダガ，トモカク 1 ト同ジ類ニ属ス元 x（即チ $x, x^{-1} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$，スナハチ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ ノ Einheiten $x = ac^{-1}$ ($a, c \in \mathfrak{O} - \mathfrak{p}$) ノナス部分群ガ一般ニ不変部分群デナイ．ヨッテ我々ノ非可換ノ場合一般ニ Clifford 式ニ旨ク行カナクテ困ル。

而シテ、ソレハ $\mathfrak{p}$ ガ Transformation デ不

変デナイトイフ言葉デモ云ヘル. 即チ $y \in \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ ニ対シテ $y\mathfrak{p}$ 必ズシモ $\mathfrak{p}y$ ニ一致シナイ. 然シ(前記 $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ ノ Einheit ノ形ヲ云々シタトキニモ陰ニ出テ来タコトダガ), t-(又ハ s-デヨイ) Primideal $\mathfrak{p}$, 而シテ $y \in \mathfrak{O}-\mathfrak{p}$ ナラバ

$$y\mathfrak{p} = \mathfrak{p}y$$

デアル。何故ナラ, $y\mathfrak{p}y^{-1} \cdot y = y\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ デ $y \notin \mathfrak{p}$ ダカラ $y\mathfrak{p}y^{-1} \subseteq \mathfrak{p}$, 即チ $y\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}y$ デアル. 同様ニ $\supseteq$ ダカラ等号ガ成立ツ。

サテ、以下弱最大條件ヲ假定スル. 即チ上カラ bounded ナ集合ノ中ニハ常ニ最大元ガ少クモ一ツアルトスル。(シカラバ(逆元ニうツルコトニヨリ)弱最小条件モミタサレテヰルコトガワカル)。

然ラバ任意ノ t-ideal $\mathfrak{a}$ ハ principal デアル. 何者. $\mathfrak{a}$ ニハ少クモ一ツ最大元 a ガアリ、$\mathfrak{a}$ ノ二元ノ $\cup$ ハヤハリ $\mathfrak{a}$ ニ属スルカラ a ハ唯一ツノ最大元デアリ $\mathfrak{a} = \mathfrak{O}a = a\mathfrak{O}$ デアル. 特ニ我々ノ t-Primideal $\mathfrak{p}$ ハ $= p\mathfrak{O} = \mathfrak{O}p$ トナル. 而シテ $p\mathfrak{p} = \mathfrak{p}p$ ハ明カデアル。然ルニ任意ノ $x \in \mathfrak{O}$ ニ対シテ、スベテノ $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ対シテ $p^n \geqq x$ ナルコトハナイカラ $p^n \geqq x$ ナル最大ナル n ガアリ、然ラバ $xp^{-n} \in \mathfrak{O}-\mathfrak{p}$ ダカラ前述ニヨリ xp^{-n} ハ $\mathfrak{p}$ ト可換, 故ニ x モマタ $\mathfrak{p}$ ト可換。

故ニ $\leqq(\mathfrak{p})$ ナル関係ハ左側ノ乗法デモ不変デアリ、$\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ ノ Einheiten ノ群ハ $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ ノ不変部分群デアリ. 前

記 $\leqq(\mathfrak{p})$ 且ツ $\geqq(\mathfrak{p})$ ニヨル類トハコノ不変部分群ニヨル剰餘類ニ他ナラヌ．而シテ $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ ハ linearly ordered ナ束群ニナリ $a \to a(\mathfrak{p})$ ハ $\mathfrak{g}$ カラ $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ ヘノ束群トシテノ準同型デアリ

$$a \longrightarrow (\cdots\cdots, a(\mathfrak{p}), \cdots\cdots)$$

ハ束群トシテノ tren ナ表現デアル。

然ルニ各 $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ ハヤハリ弱最大條件ヲミタス．何者．

$$x_1(\mathfrak{p}) < x_2(\mathfrak{p}) < \cdots\cdots < a(\mathfrak{p})$$

ナラバ

$$x_1(\mathfrak{p}) \wedge a(\mathfrak{p}) < x_2(\mathfrak{p}) \wedge a(\mathfrak{p}) < \cdots\cdots < a(\mathfrak{p})$$
$$(x_1 \wedge a)(\mathfrak{p}) < (x_2 \wedge a)(\mathfrak{p}) < \cdots\cdots < a(\mathfrak{p})$$

故ニ勿論

$$x_1 \wedge a < x_2 \wedge a < \cdots\cdots\cdots\cdots < a$$

トナッテイケナイカラデアル。

然ルニ線形ナ束群デ弱最大條件ヲミタス Γ ニオイテ $a < 0$ ナル最大元 a ヲトレバ Γ ガ a デ生成サレタ巡回群ニナルコトハ明カデアル．ヨッテ $\mathfrak{g}$ ハ結局有理整数ノ加法束群ノ上ノ無限次ヴェクトル群ノ中ニ同型ニ表現サレタワケデ勿論可換デアル．（実ハ restricted ヴェクトル群ノ上ヘノ同型ナルコト容易デアル） トモカク弱最大條件ノアル時ハ余リモ簡単デアル。

最後ニ、linearly ordered ナ束群ノ中ニ tren ニ imbed 出来ナイ束群ノ例ヲアゲテオキマス．ソノタメ

$$(\alpha, f(x))\,; \qquad \alpha\text{ハ実数}, \; f(x)\text{ハ實函數}$$

ナル全体ヲ考ヘ、コレニ乗法トシテ

$$(\alpha, f(x))(\beta, g(x)) = (\alpha+\beta, f(x+\beta)+g(x))$$

ト定義シ，マタ順序トシテ

$$(\alpha, f(x)) \leqq (\beta, g(x)) \text{ トハ } \begin{cases} 1) & \alpha < \beta \\ \text{又ハ} & \\ 2) & \alpha = \beta \text{ 且 } f(x) \leqq g(x) \end{cases}$$

トスル。シカラバコレデ束群ガ得ラレ、ソレハ上記ノ性質ヲモツ。

—(終リ)—