982. 一般ナル係數体ヲ有スル代數函數体及ビ多元環ニ就テ II

稲葉　榮次（海兵）

Kニ属スル元 y ノ $\Lambda(z)$ ニテ満足スル既約方程式ヲ $f(t,z)=0$, Kニ属スル元 u ノ $\Lambda(z,y)$ ニ於テ満足スル既約方程式ヲ $\varphi(t;z,y)=0$, u ノ $\Lambda(z)$ ニ於テ満足スル既約方程式 $\psi(t,z)=0$ トシタトキ, 有限個ノ $\mathfrak{z}$ ヲ除ケバ $\overline{f(t,z)}$ 及ビ $\overline{\varphi(t;z,y)}$ ガソレゾレ $\overline{\Lambda}(z)$ 及ビ $\overline{\Lambda}(z,\bar{y})$ ニ於テ既約ナルトキ $\overline{\psi(t,z)}$ モ $\overline{\Lambda}(z)$ ニ於テ既約トナルコトハ定理8ノ証明デ使ッタ。コレハ容易ニワカルコトナノデ証明ヲ略シタガ念ノタメニ記シテオクト, $f(t,z)$ ノ t ニ関スル次数ヲ m, $\varphi(t;z,y)$ ノ t ニ関スル次數 n トシタトキ $\psi(t,z)$ ノ次數ハ mn ノ約數 s デアル。

ソコデ $y^{\lambda}u^{\mu}$ ($\lambda=0,1,2,\cdots\cdots m-1$; $\mu=0,1,2,\cdots\cdots n-1$) ナル mn 個ノ元ハ $\Lambda(z)$ ニ関シ linear unabhängig デアルガ, 假定ニヨリ, $\bar{y}^{\lambda}\bar{u}^{\mu}$ モ $\overline{\Lambda}(z)$ ノ上ニ於テ linear unabhängig デナケレバナラヌ。

サテ $1, u, u^2, \cdots\cdots u^{s-1}$ ヲ $y^{\lambda}u^{\mu}$ デ表ハシタトキノ $\Lambda(z)$ ニ属スル係數デ作ッタ行列ノ Rang ハ s デアルガ, コレラノ係數ガ $\mathfrak{z}$-ganz 且ツ零デナイ s 次ノ行列式ノ値ガ prim ナル様ニ $\mathfrak{z}$ ヲトッテオケバ $1, \bar{u}, \bar{u}^2, \cdots$

.... $\bar{u}^{s-1}$ モ $\bar{\Lambda}(z)$ ニ於テ linear unabhängig アル. 従ッテ $\overline{\psi(t,z)}$ ハ $\bar{\Lambda}(z)$ ニ於テ既約デアル。

サテ定理8及ビ定理9ニ於テ K ガ $\Lambda(z)$ ノ einfach ナ有限次代数的拡大トシテアルガ, コノ einfach トイフ假定ハ実ハ不要デアル。

〔定理9'〕 Λ ガ代數數体カ或ハソノアル部分体 k ニ関シ Dimension 有限ニシテ正ナル体トス。K ガ $\Lambda(z)$ ノ有限次代数的拡大体デ Λ ノ代数的拡大ト unabhängig ナラバ, K ノ Restbild $\bar{K}$ ガ $\bar{\Lambda}(z)$ ノ上ノ代數函數体トナル如キ null-dimensional 或ハ $k(z)$ ノ上ノ Restbildung 無数ニ多クアル. 特ニ $\bar{\Lambda}$ ヲ k ノ代数的拡大ナラシメ得ル。

〔証〕 K ハ $\Lambda(z)$ ニ $y_1, y_2, \cdots\cdots y_\nu$ ヲ添加シテ出来ルモノナリトシ, $y_j\ (j=1,2,\cdots\cdots\nu)$, $\Lambda(z, y_1, y_2, \cdots\cdots y_{j-1})$ ニ於ケル既約方程式 $F_j(y_j)$ ハ Λ ヲ如何ニ代數的ニ拡大シテモ既約ナルコトニ変リガナイ. Λ ノ代數的閉拡大ヲ Λ^* トス。

y_i ノ $\Lambda(z)$ ニ於ケル既約方程式ガ Exponent e_i ヲ以テ inseparable ナルトキ, e_i ノ中 e ガ最大ナリト假定シテイヽ. $e_1 = e$ ト記ス. Z^{p^e} ハ $\Lambda^*(y_1, z)$ ニ含マレル. (P ハ標数)

y_1 ハ $\Lambda^*(Z^{p^e})$ ニ於テ separable ナ既約方程式 $F_0(y_1)$ ヲ満足スル. (Preußische Akademie ノ Sitzungsberichte (1934) ニ於ケル Hasse ノ

論文参照）

$j>1$ ナルトキ $F(y_j)$ ハ $\Lambda^*(Z^{p^e}, y_1, y_2, \cdots\cdots y_{j-1})$ デ既約トナリ、separable デアル。ソコデ $K\Lambda^*$ ハ $\Lambda^*(Z^{p^e})$ ノ einfach ナ有限次代数的拡大トナル。ソノトキノ $K\Lambda^*$ ノ Erzeugende ヲ u トスル。Konstantenverengung ヲ行ヒ Λ ノアル有限次代数的擴大 Λ' ヲトレバ $\Lambda'(Z^{p^e}, u) = K\Lambda'$ トナル。

定理8及ビ定理9ニヨリ u ノ $\Lambda'(Z^{p^e})$ ニ於テ満足スル既約方程式ガ $\bar{\Lambda}'(Z^{p^e})$ ニ於テモ既約ナル如ク Restbildung 無数ニ存在スル．$y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} y_3^{\lambda_3} \cdots\cdots y_\nu^{\lambda_\nu}$ ガ $\Lambda'(Z^{p^e})$ ニ於テ linear unabhängig ナルトキコレラヲ $1, u, u^2, \cdots\cdots$ デ表ハシタトキノ $\Lambda'(Z^{p^e})$ ニ属スル係数ガスベテ $\mathfrak{p}$-ganz ナル如ク且ツコノ係数ノ行列式ニ素ナルヤウニ $\mathfrak{p}$ ヲ撰ベバ $\bar{y}_1^{\lambda_1} \bar{y}_2^{\lambda_2} \cdots\cdots \bar{y}_\nu^{\lambda_\nu}$ ガ $\bar{\Lambda}'(Z^{p^e})$ ニ関シ linear unabhängig トナル。

ソコデ $\Lambda'(Z^{p^e})$ ニ於テ既約ナル $F_0(y_1)$ ハ $\bar{\Lambda}'(Z^{p^e})$ ニ於テモ既約デアリ，$\Lambda'(Z, y_1, y_2, \cdots\cdots y_{j-1})$ ニ於テ既約ナル $F_j(y_j)$, $j>1$ ハ $\bar{\Lambda}'(z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots\cdots \bar{y}_{j-1})$ デ既約トナル。ソコデ $F(y_1)$ ハ $\bar{\Lambda}'(z)$ ニ於テ既約．

結局 $F_j(y_j)$ $(j=1, 2, \cdots\cdots)$ ハ $\bar{\Lambda}(z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots\cdots \bar{y}_{j-1})$ デ既約トナリ K ノ Restbild $\bar{K}$ ハ体トナル。（証終）

次ニ K ノ $\Lambda[z]$ ノ上ノ Hauptordnung I ノ Restbild $\bar{I}$ ガ $\bar{K}$ ノ $\bar{\Lambda}[z]$ ノ上ノ Hauptordnung トナル如キ Resthomomorphism 如何ヲ調ベル。Hauptordnung I ノ Modulbasis, Normalbasis 等ニ関シテハ, Math. Zeitschr. Bd. 41 (1936) ニ於ケル F. K. Schmidt ノ論文参照スル. 亦コノ記号ヲ説明ナシニ用フルコトガアル。

〔Lemma 2〕 Λ ハ標数 0 ナル任意ノ体トス. K ハ $\Lambda(z)$ ノ上ノ Λ ノ代数的拡大ト独立ナ代数函数体トスル.

Λ^* ガ Λ ノ任意ノ拡大ナルトキ, K ノ $\Lambda[z]$ ノ上ノ Hauptordnung I ノ Modulbasis ハ $K^* = K\Lambda^*$ ノ $\Lambda^*[z]$ ノ上ノ Hauptordnung I^* ノ Modulbasis トナル. 亦コノトキ K ノ Normalbasis ハ K^* ノ Normalbasis トナル. 且コレラノ Hilfsbemerkung ニ関スル Exponent ハ変ラヌ。

〔定義〕 Λ ニ有限個ノ元（代数的デモ超越的デモイヽ）ヲ添加シタ拡大ヲ Λ ノ Dimension 有限ナ拡大トイフ。

〔Lemma ノ証〕 I^* ノアル Modulbasis 或ハ Normalbasis ヲ b_i^* トシ, コレノ Λ^* ニ属スル係数ヲスベテ Λ ニ添加シタモノハ Λ ノ Dimension 有限ナ拡大デコレヲ Λ' トスル.

Iノ Modulbasis b_iガ $K\Lambda'=K'$ ノ $\Lambda'[Z]$ノ上ノ Hauptordnung I'ノ Modulbasis ナルコトガワカレバ b_i^*ト b_iトハ行列式ノ値ガ Λ'ニ属スル如キ Transformation デ結ビ付クカラ b_iガ I^*ノ Modulbasis トナル。

トコロデ Λノ Dimension 有限ナ拡大ニヨッテ b_iガ Hauptordnung ノ Modulbasis ナルコトヲ失ハナイコトヲ証スルニハ，一ツノ不定元 xヲ Λニ添加シタ場合及ビ Λヲ有限次代数的ニ拡大シタ場合ニツイテ証明スレバイイ。Normalbasis ニツイテモ同ジ。

(イ) $\Lambda^*=\Lambda(x)$ ナルトキ

I^*ノ元ガ $\sum_{i=1}^{n} Q_i(x, Z)\, b_i$ ナル形ニ表ハサレタトスル。

但シ $Q_i(x, Z)$ハ $\Lambda(x)$ニ於ケル Zノ有理函数デアル。モシ $Q_i(x, Z)$ノウチニ Zノ多項式ナラザルモノアリトスレバ，ソレヲ $Q_1(x, Z)$トシ，$Q_1(a, Z)$ガ Zノ多項式ナラザル如ク xノ値ニ Λニ属スル aヲトラシムルコトヲ得。

シカモカヽル aノトリ方ハ無数ニ多クアリ，シカルニ I^*ノ元ノ $\Lambda(x, Z)$ニ於ケル方程式ノ係数ハソノ最高幕ノ係数 1 トシタトキ，Zノ多項式トナルハヅナルヲ以テ有限個ノ aヲ除キ，$x=a$トシタルトキ $\sum_{i=1}^{n} Q_i(a, Z)\, b_i$ ガ Iニ属スルコトニナリ，$Q_1(a, Z)$ハ Zノ多項式ナラザルヲ以テ b_iガ Iノ Modulbasis ナルコトニ反ス。

従ッテ b_i ハ I^* ノ Modulbasis デナケレバナラヌ。

次ニ b_i ガ Normalbasis ナルトキ即チ $b_i Z^{\exp b_i}$ ガ $\mathfrak{O}_\infty/\Gamma_\infty$ ノ Modulbasis ナルトキ，コレガ $\mathfrak{O}^*_\infty/\Gamma^*_\infty$ ノ Modulbasis デナイナラバ，（$\mathfrak{O}^*_\infty$ ハ Z ノ分母ニ入ル素因子ニツイテ ganz ナモノノ集リデ，即チソノ $\Lambda^*(Z)$ ニ於ケル方程式ノ係数ガ最高冪ノ係数ノナルトキスベテ Γ^*_∞ ニ属スル如キモノノ集リデアル）。シカルトキ $z\sum c_i(x)\, b_i Z^{\exp b_i}$，$c_i(x) \subset \Lambda^*$ ナル如キ元ガ $\mathfrak{O}^*_\infty$ ニ属スルコトニナル。コレノ $\Lambda^*(Z)$ ニ於テ満足スル方程式ノ係数ハ Γ^*_∞ ニ属スルガ，ソノ分母ノ Z ノ多項式ノ最高冪ノ係数ガ零トナラザル如ク x ニ Λ ニ属スル a ナル値ヲ與ヘ，且ツ $c_i(a)$ ガスベテハ零デナイヤウニスル。

シカラバ $z\sum c_i(a)\, b_i Z^{\exp b_i}$ ハ $\mathfrak{O}_\infty$ ニ属スルコトニナリ，$b_i Z^{\exp b_i}$ ガ $\mathfrak{O}_\infty/\Gamma_\infty$ ノ Modulbasis ナルコトニ反ス．ヨッテ $b_i Z^{\exp b_i}$ ハ $\mathfrak{O}^*_\infty/\Gamma^*_\infty$ ノ Modulbasis トナリ即チ b_i ハ K^* ニ於ケル Normalbasis トナル。

（ロ） Λ^* ガ Λ ノ有限次代数的拡大デ $\Lambda^* = \Lambda(\alpha)$ ナルトキ I^* ノ元 A ハ K ニ属スル係数ヲ有スル α ノ多項式トシテ表ハサレル．ソノトキコノ K ニ属スル係数ハスベテ I ニ属スル．何トナレバ

$$A = a_0 + a_1\alpha + \cdots\cdots + a_{m-1}\alpha^{m-1}$$

$$a_i \subset K$$

トシタトキ, $\alpha \longrightarrow \alpha^{\sigma}$ ナルΛ^*ノΛノ上ノAutomorphism σニツキ

$$A^{\sigma} = a_0 + a_1\alpha^{\sigma} + \cdots\cdots + a_{m-1}\alpha^{\sigma(m-1)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha\,\alpha^2 \cdots\cdots & \alpha^{m-1} \\ 1 & \alpha^{\sigma}\alpha^{\sigma 2} \cdots\cdots & \alpha^{\sigma(m-1)} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} \neq 0$$

デアルカラa_iハスベテIニ属スルコトガ容易ニワカル．故ニb_iハI^*ノModulbasisデアル．次ニb_iガNormalbasisナルトキハ，即チ$b_i Z^{\exp b_i}$ガ$\mathfrak{V}_\infty/\mathfrak{T}_\infty$ノModulbasisナルトキハ，$\mathfrak{V}_\infty^*$ノ任意ノ元ヲ係数Kニ属スル$\alpha$ノ多項式ト表ハシタトキ，ソノ係数ハ$\mathfrak{V}_\infty$ニ属スル．（上ト同様ニ証シ得ルカラ略ス）．故ニ$b_i$ハ$K^*$ノNormalbasisデアル。　（証終）

標数$\neq 0$ナルトキハ必ズシモコノLemmaハ成立セヌ（後述ノ例参照）

〔定義〕 Kハ$\Lambda(Z)$ノ上ノΛノ代数的拡大ト独立ナ代数函数体トスル。Λノアル拡大ヲΛ^*トシ，Kノ$\Lambda[Z]$ノ上ノHauptordnungノアルModulbasisニシテNormalbasisナルO_iガ$K^* = K\Lambda^*$ノ$\Lambda^*[Z]$ノ上ノHauptordnungノModulbasisニシテNormalbasisナルトキ，カヽル代数函数体Kハ係数体拡大Λ^*ニ関シganz abgeschlossenトイフ。

標數0ナラバΛト独立ナ代數函數体ハスベテ係數体拡大ニ関シ ganz abgeschlassen デアルガ，標數キ0ナルトキハ必ズシモソウデナイ．任意ノ係数体拡大Λ^*ニ関シ常ニΛニアル dimension 有限ナ拡大ヲ行ヘバ ganz abgeschlossen トナル．何トナレバK^*ノ$\Lambda^*[Z]$ノ上ノ Hauptordnung ノアル Modulbasis ニシテ Normalbasis ナルモノニ於ケルΛ^*ニ属スル係数ヲスベテΛニ添加シタモノヲ新ニ係数体トスレバイヽ。

〔定理10〕 標數0ナルトキ任意ノ係數体縮少ニヨリKノΛ〔Z〕ノ上ノ Hauptordnung I ノ Modulbasis ニシテ Normalbasis ナルモノ O_i ヲ適当ニトレバ，ソノ Restbild $\bar{I}$ ハ$\bar{K}$ノ$\bar{\Lambda}[Z]$ノ上ノ Hauptordnung ニナリ，ソシテ$\bar{O}_i$ハ$\bar{I}$ノ Modulbasis ニシテ Normalbasis トナル。

標數キ0ナルトキハ Restbild ガ係數体拡大Λニ関シ ganz abgeschlossen ナル如キ係數体縮少ナラバ常ニ成リ立ツ．コノ際 O_i ノ Exponent ハ $\overline{O_i}$ ノソレニ等シ。

（証） Lemma 2及ビ定義ニヨリ$\bar{I}$ノアル Modulbasis ニシテ Normalbasis ナルモノハ I ノ Modulbasis ニシテ Normalbasis トナルカラ，コレヲトレバイヽ。

〔定理11〕 Restbild ガ係數体拡大Λニ関シテ

ganz abgeschlassen ナル如キ係數体縮少ニヨッテ$\overline{K}$ノ示性數ハKノソレト同ジデアル。

〔定義〕 Restbild ガ係數体拡大λニ関シテ ganz abgeschlossen ナル如キ係數体縮少ヲ geschlechlechttren トイフ。

〔定理11ノ証〕 $\overline{I}$ノ Modulbasis ニシテ Normalbasis ナル$\overline{o_i}$ノ Exponent ヲ$\overline{\omega_i}$デ示セバ

$$\overline{g}=-\sum\overline{\omega_i}-n+1$$

o_iノ Exponent モヤハリ$\overline{\omega_i}$デアルカラKノ示性數ハ$\overline{g}$ニ等シ。

例1. kハ標數pキ0ナル Primkörper ノ代數的閉拡大トシ，ξハアル不完元，常數体ヲΛ＝k(ξ)トス。KハΛ(z)ノ上ノ代數函數体デ$\sqrt[p]{(z^p-\xi)z}$ヲ添加シテ出来ルモノトス。コノKガアル係數体拡大ニ関シ ganz abgeschlossen デナイコトヲ証スル。

Kニ属スル元Aハ

$$c_0(z)+c_1(z)\{(z^p-\xi)z\}^{\frac{1}{p}}+\cdots\cdots+c_{p-1}(z)\{(z^p-\xi)z\}^{\frac{p-1}{p}}$$

$$c_i(z)\subset\Lambda(z)$$

ナル形デアル。ソノ norm ハ

$$c_0(z)^p+c_1(z)^p(z^p-\xi)+\cdots\cdots+c_{p-1}(z)^p(z^p-\xi)^{p-1}z^{p-1}$$

デアルカラ，norm ガz^pノ有理函数ナルトキ

$$c_1(z)=0,\ c_2(z)=0,\ \cdots\cdots\ c_{p-1}(z)=0$$

トナリ，コノ元Aハ$\Lambda(z)$ニ属スルコトニナル。今$\mathfrak{a}$ガ$z^p-\xi$ノ分子ニ入ル素因子トシ$\mathfrak{L}$ハzノ分子ニ入ル一ツノ素因子ノ冪デ次数ガ$\mathfrak{a}$ノソレニ等シトス。

シカラバ$\dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{L}}$ハ$\Lambda(z)$ニ属スル元ニヨツテ生ズル主因子デハナイ。亦$\dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{L}}$ガ主因子(A)ダトスルトAノnormハ$\dfrac{\mathfrak{a}^p}{\mathfrak{L}^p}=\left(\dfrac{z^p-\xi}{z^p}\right)$ニ等シクz^pノ有理函数デアルカラ$\dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{L}}$ハ主因子デナイコトニナル。

ソコデRiemann-Rochノ定理ニヨリ示性数ハ零ヨリ大デアル。

サテ$\Lambda'=\Lambda(\xi^{\frac{1}{p}})$トスレバ$K'=K\Lambda'=\Lambda'(z,\sqrt[p]{z})$トナリ，$K'$ノ示性数ハ明ラカニ零デアル。依ツテKハ係数体拡大$\Lambda'$ニ関シganz abgeschlossenデハナイ。

コレニヨリ$\Lambda=k(\xi)$ナルトキ$\Lambda(z)=\sqrt[p]{(z^p-\xi^p)z}$ヲ添加シタ代数函数体$K_1$ニツイテ$\bar{\Lambda}=k(\xi^p)$ナル係数体縮少ヲ行ヘバGeschlechttrenデナイコトガワカル。

〔定理12〕 Kガ定理9'ニ於ケル如キ代数函数体トスル。但シ$\Lambda(z)$ノ上デeinfach separableデ任意ノ代数的拡大ニ関シganz abgeschlossenトスル。

シカラバKノRestbild $\bar{K}$ガ亦体トナリ，Kノ$\Lambda(z)$ノ上ノHauptordnung IノRestbild $\bar{I}$ガ

$\overline{K}$ ノ $\overline{\Lambda}[z]$ ノ上ノ Hauptordnung トナル如ク $k(z)$ ノ上ノ Restbildung 或ハ null-dimensional ナ Restbildung 無數ニ多クアル．コノトキ $\overline{I}$ ノアル Modulbasis O_i ノ Restbild $\overline{O_i}$ ハ $\overline{I}$ ハ Modulbasis トナル。

〔證〕 K ハ $\Lambda(z)$ ニ u ヲ添加シテ出来タモノトス．I ノ Modulbasis O_i ヲ $\sum_{j=0}^{n-1} c_{ij}(z)u^j$ ト表ハシタトキノ $c_{ij}(z)$ ガ $\mathfrak{z}$-ganz ナル如ク $\mathfrak{z}$ ヲ撰ブ。$O_1, O_2, \cdots\cdots O_n$ デ作ッタ Diskriminant ヲ d トシ，d ニ於ケル係數スベテ $\mathfrak{z}$-ganz デ，z ノ最高冪ノ係數 $\mathfrak{z}$ ニ prim ナルヤウニ $\mathfrak{z}$ ヲトル．Restbild $\overline{K}$ ガ体トナル如ク $\mathfrak{z}$ ヲ撰ビ，$\overline{K}$ ノ $\overline{\Lambda}[z]$ ノ上ノ Hauptordnung I′ ノ元ハ $\overline{O_i}$ ニヨッテ表ハサレル．ソノトキノ係數ハ $\dfrac{\overline{Q_i}}{d}$ ナル形トナル。

$\overline{Q_i}$ ハ z ノ多項式デアル．$\overline{O_i}$ ガ I′ ノ Modulbasis ナルコトヲ云フニハ d ノ次數ヲ m トシ，$P_i = a_{i0} + a_{i1}z + \cdots\cdots + a_{im}z^{m-1}$，$a_{ij} \subset \Lambda$ トオクトキ

$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\overline{P_i}}{d}\overline{O_i}$ ナル元ノ満足スル $\overline{\Lambda}(z)$ ニ於ケル方程式ノ係數ガスベテ z ノ多項式トナリソノ最高冪ノ係數 1 トナルノハ $\overline{P_i} = 0$ ナルトキニ限ルコトヲ云ヘバイヽ。

今 $U_i = u_{i0} + u_{i1}z + \cdots\cdots + u_{i,m-1}z^{m-1}$ トオキ u_{ij} ハ mn 個ノ不定元トスル。$(i = 1, 2, \cdots\cdots n)$

$$E o_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} o_j$$

$e_{ij}=1\ (i=j),\ e_{ij}=0\ (i\neq j)$ トスルトキ $|c_{ij}-xe_{ij}|$ ハ E ノ characteristic equation デアル。$u_{ij}=a_{ij}$ トシタトキコレノ x^{n-s} ノ項ノ係數ガ d^s デ割レルノハ a_{ij} ガ係數ガ Λ ニ属スルアル u_{ij} ニ関スル斉次方程式ノ system ノ解ナルトキニ限ル。コレガ $S=0,1,2,\cdots\cdots n$ ニツイテ成立テバ

$\sum \frac{p_i}{d} o_i$ ノ characteristic equation ノ各係數

ガ Z ノ多項式トナルノデアルカラ，o_i ガ I ノ Modul-basis ナル限リ Λ ヲ如何ニ代數的ニ拡大シテモ $p_i=0$ 即チ $a_{ij}=0$ デナケレバナラヌ．ソコデ $S=0,1,2,\cdots\cdots n$ トシタトキノ u_{ij} ニ関スル斉次方程式ノスベテノ system ノ解ハ係數体 Λ ヲ如何ニ代數的ニ拡大シテモ $u_{ij}=0$ ナル trivial ナ解ノミ有スル．従ッテソノ斉次方程式ノ係數ニ加法，減法，乗法ヲ施シテ出来タ Resultanten ノ中ニ零デナイモノガアル．コレラノ斉次方程式ノ係數ガスベテ $\mathfrak{z}$-ganz ナル如ク且ツ零デナイ Resultant ノ値ニ prim ナル如ク $\mathfrak{z}$ ヲ撰べバ

$$\bar{E}\, \bar{o}_i = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_{ij}}\, \overline{o_j}$$

デ $|\overline{c_{ij}}-xe_{ij}|=0$ ノ各項 x^{n-s} ノ係數ガ $\bar{d}^s$ デ割レルノハ $u_{ij}=0$ ナルトキノミデアル．ソコデ

$\sum_{i=1}^{n}\frac{p}{d}\,\overline{O}_i$ ガ I ニ属スルノハ $\overline{P}_i=0$ ノトキノミデアル。

（証終）

〔定理 13〕 定理 12 ニ於テ O_i ガ K ノ Normal-basis ナルトキ $\overline{O}_i$ ガ $\overline{K}$ ノ Normalbasis ナル如キ Restbildung 無数ニ多クアル。コノトキ $\overline{O}_i$ ノ Exponent ハ O_i ノソレニ等シ。

（証） O_i ノ Exponent ヲ ω_i トスレバ $O_i Z^{\omega_i}$ ハ $\mathfrak{O}_\infty/\Gamma_\infty$ ノ Modulbasis デアル。$\mathfrak{O}_\infty$ ニ属スルモノハソノ $\Lambda(z)$ ニ於ケル方程式ノ最高冪ノ係数ヲ 1 トスレバ他ノ係数ハ Γ_∞ ニ属スル。$\mathfrak{O}'_\infty$ ガ $\overline{\Lambda}(z)$ ニ於ケル方程式ノ最高冪ノ係数ヲ 1 ニシタトキ他ノ係数ガ $\overline{\Gamma}_\infty$ ニ属スル如キ $\overline{K}$ ノ元ノ集リトスレバ $\mathfrak{O}'_\infty$ ハ $\overline{\mathfrak{O}}_\infty$ ヲ含ムガ，モシモ $\overline{O}_i Z^{\omega_i}$ ガ $\mathfrak{O}_\infty'/\overline{\Gamma}_\infty$ ノ Modulbasis デナイトスルト

$$Z\sum_{i=1}^{n}\overline{C}_i\,\overline{O}_i\,Z^{\omega}\qquad(\overline{C}_i<\overline{\Lambda})$$

ナル形ノ元ガ $\mathfrak{O}'_\infty$ ニ属スルコトニナル。ソレハ $\sum_i \overline{C}_i\,\overline{O}_i\,Z^{\omega_i}$ ノ満足スル characteristic equation ノ x^{n-s}，項ノ係数ノ次数ガ $-s$ ヨリ大ナラザルコトヲ意味スル。

シカルニ $\sum C_i O_i Z^{\omega_i}$ $(c_i<\Lambda)$ ノ characteristic equation ノ x^{n-s} $(s=0,1,2,\cdots\cdots n)$ ノ項ノ係数ノ次数ガ $-S$ ヨリ大ナラザルコトハ C_i ガアル

有次方程式ノ system ノ解ナルコトデアリ, $O_i Z^{\omega_i}$ ガ $\mathfrak{O}_\infty/\Gamma_\infty$ ノ Modulbasis ナル限リ Λ ヲ如何ニ代数的ニ拡大シテモ trivial ナ解ノミヲ有スル. 即チ $C_i=0$. ソコデ Resultanten ノ値ノ中ニ零デナイモノガアル. カヽルスベテノ有次方程式ノ係数ガ $\mathfrak{P}$-ganz ナル如ク, コノ零デナイ Resultant ノ値ニ prim ナル如ク $\mathfrak{P}$ ヲ撰ベバ, $z\sum \overline{c_i}\,\overline{O_i}\,Z^{\omega_i}$ ノ characteristic equation ノ係数ガ $\overline{\Gamma_\infty}$ ニ属スルノハ $\overline{C_i}=0$ ノトキノミトナル. ヨッテ $\overline{O_i}\,Z^{\omega_i}$ ハ $\mathfrak{O}'_\infty$ ノ Modulbasis デ $\mathfrak{O}'_\infty=\overline{\mathfrak{O}_\infty}$ トナル. 同時ニ $\overline{O_i}$ ノ Exponent ガ ω_i ナルコトモ証セラレタ。 (証終)

〔定理14〕 定理9′ニ於ケル如キ代数函数体Kニ於テ $\overline{K}$ ガ亦代数函数体デ定理12及ビ13ニ於ケル如クKノ$\Lambda[z]$ノ上ノ Hauptordnung I ノ Restbild $\overline{I}$ ガ $\overline{K}$ ノ $\overline{\Lambda}[z]$ ノ上ノ Hauptordnung デ I ノ Modulbasis ニシテ normalbasis ナル O_i ノ Restbild $\overline{O_i}$ ガ $\overline{I}$ ノ Modulbasis ニシテ normalbasis ナル如ク Restbildung ヲ撰ブトキ $\overline{K}$ ノ示性数 $\overline{g}$ ハ K ノソレ g ニ等シ.

〔定義〕 定理14ニ於ケル如キ Restbildung ヲ geschlecttren トイフ.

〔定理14ノ証〕 O_i ノ Exponent ω_i, $\overline{O_i}$ ノ Exponent $\overline{\omega_i}$ トスレバ, 定理13ニヨッテ

$$\omega_i=\overline{\omega_i}$$

$$g = -\sum \omega_i - n + 1$$
$$\bar{g} = -\sum \overline{\omega_i} - n + 1$$
$$\therefore \quad g = \bar{g}$$

例2. Λが標数$\neq 2$ニシテ代数数体或ハアル部分体ニ関シ dimension 有限ニシテ正ナル体トス。$K = \Lambda(z, \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)})$ ナル代数函数体ニ於テ $a, b, c \subset \Lambda$ トシ $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ トス。コレノ$\Lambda[z]$ノ上ノ Hauptordnung Iノ Modulbasis ハ 1 ト $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ ナルコト且ツコレガ normalbasis ナルコト容易ニワカル。シカシテソノ Exponent ハ夫々0及ビ-2トナリ，依テ $g=1$.

シカルニ $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0 \mod \mathfrak{P}$ ナル如ク$\mathfrak{P}$ヲトルトキ$\bar{I}$ガ$\bar{K}$ノ$\bar{\Lambda}(z)$ノ上ノ Hauptordnung デ1ト$\sqrt{(z-\bar{a})(z-\bar{b})(z-\bar{c})}$ガソノ Modulbasis ニシテ normalbasis トナリ且ツ$\bar{K}$ノ示性数ハ1デアルガ，$(a-b)(b-c)(c-a) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}$ ナル如ク$\mathfrak{P}$ヲトルト，ソウハナラヌ。例ヘバ $a \equiv b \mod \mathfrak{P}$ ナラバ $\bar{a} = \bar{b}$ デ1及ビ$\sqrt{(z-\bar{a})(z-\bar{b})(z-\bar{c})} = (z-\bar{a})\sqrt{z-\bar{c}}$ ハ Hauptordnung $\bar{I}$ノ Modulbasis ニナラヌ。ソシテ $\bar{K} = \bar{\Lambda}(z, \sqrt{z-\bar{c}})$ トナリ，ソノ示性数零トナル。コノ場合ノ Restbildung ハ geschlechttreu デハナイ。

定理12ニ於テKガ$\Lambda(z)$ノ上デ einfach separable デ且ツ係数体拡大ニ関シテ ganz abgeschlossen ナル假定ハ必要ナルコトハ例1ヲ見レバイヽ。コノ場合ノ Restbildung ノ可能ナルモノハ k ノ上ノ Restbildung デ dimension 1 デアルカラ從ッテ z ハ k ノアル元 a ニ abbild サレル。ソコデ $\bar{K}=\bar{\Lambda}(z, \sqrt[p]{z})$ トナリ，ソノ示性数 0 トナル。

依ッテコノ場合 geschlechttreu ナ Restbildung ハ存在セヌ。併シ一般ニ常数体 Λ ニ dimension 有限ナル拡大ヲ行ヒヌノ代リ z^{p^e} ヲトレバ常ニ定理 12 ノ假定ヲ満足セシメル様ニシ得ル。separable デアッテアル係数体拡大ニ関シテ ganz abgeschlossen デナイヤウナ代数函数体ノ例ハ未ダ見ツカラヌ。

（未完）