# 980. 單位ヲ有スル vector 束ニ就テ, III

吉田耕作, 深宮政範(阪大)

前談話 912, 916 ノ結果ヲ"代數的"ニ擴張スルト algebras ノ基本定理"algebra E ヲソノ radical R デ剩餘類ヲトツタトキ E/R ハ semi-simple ニナリ, 從ッテ E/R ハ total matric algebras 直和トシテ表現デキル"ニ parallel ナ形ニ vector 束ノ表現定理ガ得ラレル樣デアルカラ之ヲ述ベラミタイ. (種々 discuss シ且ツ多クノ hints ヲ與ヘラレタ中山氏ニ感謝シタイ)

<u>Vector 束ノ定義</u> 實數 ($\alpha, \beta, \cdots\cdots$ デ表ハス) ヲ係數トスル加法群 (ソノ要素ヲ $x, y, z, \cdots\cdots$ デ表ハス) ニ於テ次ノ條件ヲ滿足スル semi-order $\geqq$ ガ定義サレテルトキ E ヲ vector 束ト呼ブ:

(1) $f \geqq g$ ト $f-g \geqq 0$ トハ同等

(2) $f \geqq 0$, $\alpha \geqq 0$ ナラ $\alpha f \geqq 0$

(3) $f \geq 0,\ -f \geqq 0$ ナラ $f=0$

(4) $f \geqq 0,\ \ g \geqq 0$ ナラ $f+g \geqq 0$

(5) $\geqq$ ノ意味デ E ハ束ヲ作ル．即チ全テノ $f$ ニ對シ join $f \vee 0 = f^{+}$ ガ定ル。[1]

尚 E ハ單位 $I > 0$ ヲ有スルトスル：

(6) 全テノ $f$ ニ對シ $\alpha I \geqq f \geqq -\alpha f$ ナル如キ $\alpha$ 定ル。

前談話 912，916 ノ結果ニヨレバ E ガ Archimedes ノ公理

(A) $\displaystyle \underset{n\to\infty}{\text{order limit}} \frac{1}{n} f = 0 \quad \text{for all } f \geqq 0$

ヲ滿足スルナラバ E ハ E ノ maximal ideal M ノ全体 $\mathfrak{M}$ ノ上デ定義サレタ函數ニヨッテ lattice-isomorphic ニ表現ガキル。（然モ I ハ $\mathfrak{M}$ ノ上デ恒等的ニ 1 ナル函数トシテ）。

以下ニハ（A）ヲ假定セズニ議論スル。

ideal　E ノ linear subspace N ガ與ヘラレタルトキ linear-homomorphism $E \to E/N$ ガ lattice-homomorphism 即チ $a \equiv a',\ b \equiv b'$ (N) ナラ $a \diamondsuit b \equiv b \diamondsuit b'$ ナルタメノ必充條件，N ガ ideal ナルコト：$x \in N$ 且ツ $|y| \leqq |x|$ ナラ $y \in N$．デアル。$0 \neq N,\ E \neq N$ ナル如キ ideal ヲ non-

---

(1) $f \wedge 0 = f^{-}$，$f = f^{+} + f^{-}$，$|f| = f^{+} - f^{-} = f \vee (-f)$ 等既知。

trivial，又自分自身及ビE以外ノidealニ含マレナイ様ナnon-trivial idealヲmaximalデアルト云フ。non-trivial idealsノtransfinitナincreasing sequence.

$$N_1 < N_2 < \cdots\cdots < N_\eta < \cdots\cdots,\ \eta < \omega$$

ガ與ヘラレタトキ $x \equiv y\ (N_\omega)$ ヲ少クトモ一ツノ $\eta<\omega$ ニ對シテ $x \equiv y\ (N_\eta)$ ニヨツテ定義スルト $N_\omega$ ハ上カラidealニナル。$N_\eta$ 全テnon-trivialダカラ $I \not\equiv 0\ (N_\eta)$, $\eta<\omega$, ヨツテ $I \not\equiv 0\ (N_\omega)$. 即チ $N_\omega$ モ亦non-trivial. 故ニEハmaximal idealヲ有スル。

<u>Radical</u> 或ル $\alpha > 0$ ニ對シテ $\alpha I > n|a|$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ナル如キaヲnilpotentデアルト呼ブ。Eノmaximal ideal Mノ全体 $\mathfrak{M}$ ノintersection ideal $R = \bigwedge_{M\in\mathfrak{M}} M$ ヲradicalト呼ブ。

<u>定理</u> (i) E/R ハ $\{M/R\}_{M\in\mathfrak{M}}$ ノ上デ定義サレタ実函数ニヨツテlattice-isomorphicニ表現サレル。[1] 然モIハ恒等的ニ1ナル函数ニヨツテ (ii) Rハnilpotentナ要素ノ全体ニ一致スル。

---

(1) 之レ等函數ノ全体ハ，適當ニtopology入レタ $\{M/R\}$ ノ上ノ連續函數ノ全体ノ中デ一様収斂ノ意味デdenseニナル（前談話）カラalgebrasノ場合ノ"連和表現"相應スルト考ヘテヨイ。

証明 (i) $E/M$, $M\in\mathfrak{M}$ ガ實數ノ作ル vector 束ト lattice isomorphic ($I\longleftrightarrow 1$ ナル如ク) ナコトサヘ云ヘバヨイ。所ガ $M$ ノ maximality カラ $E/M$ ハ simple 即チ ideal ヲ含マナイ。

simple ナ vector 束 $E'$ ハ nilpotent ナ $a\neq 0$ ヲ含マナイ。若シ $a$ ガ nilpotent ナラ $(|x|\leqq\eta|a|)_{\infty>\eta}$ ナル如キ $x$ ノ全体ハ non-trivial ideal ニナルカラ、從ッテ simple ナ vector 束 $E/M$ ハ (A) ヲ滿足スルカラ 前談話ノ結果ニヨリ實數全体ト思ッテヨイ。

(ii) nilpotent ナ $a$ ハ一ニ示シタ如ク non-trivial ideal ニ含マレルカラ $\in M$, $M\in\mathfrak{M}$. 從ッテ $a$ nilpotent ナラ $\in R$.

逆ニ $a>0$ ガ nilpotent デナイトスルト $a\,\overline{\in}\,R$ 即チ $a$ ヲ含マヌ $M\in\mathfrak{M}$ ガ存在スルコトヲ示ストヨイ。以下其證明。

假定ニヨリ $na\not\leqq I$ ナル如キ正整數 $n$ ガ存在スル。$na\geqq I$ ナラ勿論 $na\,\overline{\in}\,M$, $M\in\mathfrak{M}$ ダカラ $na\not\geqq I$ ト假定スル。然ラバ $p=I-(na)\wedge I>0$. コノトキドンナ正整數 $m$ ニ對シテモ 決シテ $mp\geqq I$ トハナラナイ。若シ然ラズトスレバ $\frac{I}{m}\leqq I-(na)\wedge I$

從ッテ $na\wedge I=na\wedge(1-\frac{1}{m})I$, 之レヨリ

$$\{na-(1-\tfrac{1}{m})I\}\wedge\tfrac{1}{m}I=\{na-(1-\tfrac{1}{m})I\}\wedge 0\leqq 0$$

從テ $[\{na-(1-\frac{1}{m})I\}\wedge\frac{1}{m}I]\vee 0=\{na-(1-\frac{1}{m})I\}^{+}\wedge\frac{1}{m}I=0$

ヲ得ル。之ヨリ $\{na \dot{-} (1-\frac{1}{m})I\}^{+} = 0$

即チ $na \leqq (1-\frac{1}{m})I$ ヲ得テ[(1)] $na \not\leqq I$ ニ矛盾スル。

以上

---

(1) 一般ニ $b \geqq 0$, $b \wedge I = 0$ ナラ $b = 0$. 何者, $b > 0$ トスルト $b < \alpha I$ ヨリ $0 < b = b \wedge \alpha I$. 之レハ $\alpha < 1$ ナラ $b \wedge I = 0$ ニ矛盾. 又 $\alpha \geqq 1$ ナラ $0 = \frac{0}{\alpha} < \frac{b}{\alpha} \wedge I \leqq b \wedge I$ デ $b \wedge I = 0$ ニ矛盾スル。