976. Erdös ノ問題ニ就イテ

近藤　基吉(北大)

本誌ノ第二〇五号ニ掲載サレタ角谷氏ノ書簡ノ中ニ二三ノ問題ガ出テ居テ、ソノ一ツガ Erdös ノ提出シタ「$0 \leqq x, y \leqq 1$ ナル square 内ノ measure 1 ノ集合デ如何ナル X ト Y (但シ、X, Y ノ濃度ハ何レモ continuum) ナル形ノ集合ヲ含マナイモノガ存在スルカ」

デアル。コンデ X+Y ノ意味ガヨク判ラナイガ先ヅ vector sum 即チ X ノ点 (a,b) ト Y ノ点 (c,d) トカラ作ラレル $(a+c,\ b+d)$ ノ全体カラナル集合ニ考ヘルト，G. Cantor ノ hypothèse du continu ノ下ニコレガ否定的ニ解決サレル．先ハムツカシイコトデハナク，次ノヤウニスレバ十分デアル．初メニ正方形 $R: 0 \leqq x, y \leqq 1$ ニ変換．

$$\theta:\ x' = x - \frac{1}{2},\quad y' = y - \frac{1}{2}$$

ヲ施シテ考ヘル。E ヲ R ニ含マレル測度 1 ノ可測集合トスルトキニ、θ ニ依ツテ E ハ $\theta(E)$ ニ移ル．ソコデ $\theta(E)$ ノ中ニ濃度 $\aleph_1$ ノ集合 Z ヲ作ツテ $Z + Z \subseteq \theta(E)$ ガ成立ツヤウニスル。其ノ仕方ハ先ヅ z_1 ヲ $\theta(E) \cdot \frac{1}{2}\theta(E)$ ノ中ニ選ブ（$\theta(E)$ ノ可測性カラコレハ可能）スルト z_1, $2z_1 \in \theta(E)$ デアル．今 z_β $(\beta < \eta < \Omega)$ ガ $\theta(E)$ ノ中ニ選バレテ

$$z_\beta + z_\gamma \in \theta(E) \qquad (\beta, \gamma < \eta)$$

ガ成立ツトスル．次ニ

$$\theta(E) \cdot \frac{1}{2}\theta(E) \cdot \prod_{\beta<\eta} \left(-z_\beta + \theta(E)\right)$$

ヲ作ル．$\theta(E)$ ノ可測性カラコレハ空デナイ。此ノ中ノ一点ヲ z_η トスル．スルト

$$z_\eta \in \frac{1}{2}\theta(E) \qquad z_\eta \in -z_\beta + \theta(E)$$

カラ $z_\eta + z_\beta \in \theta(E)$ $(\beta \leqq \eta)$ デアル．此ノ様ニシテ選

バレタ $\mathfrak{Z}_\beta$（$\beta<\Omega$）ノ全体ヲ $\mathfrak{Z}$ トスレバ $\mathfrak{Z}+\mathfrak{Z}\subseteq\theta(E)$ ハ明カデアル. トコロデ

$$\theta(E)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)+E$$

デアルカラ、$-\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)+\mathfrak{Z}+\mathfrak{Z}\subseteq E$ ガ成立ツ. 故ニ $X=-\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)+\mathfrak{Z}$, $Y=\mathfrak{Z}$ トスレバ $X+Y\subseteq E$. シカモ X, Y ノ濃度ハ共ニ $\aleph_1$ デアル。今 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ヲ假定スレバ X, Y ノ濃度ガ continuum トナリ Erdös ノ問題ガ否定的ニ解決サレル。

此処デ $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ノ假定ガ取レレバヨイガ、此方法デハ困難デアル。但シコノ假定ヲ「測度 0 ノ集合ノ $\aleph_\xi$（但シ $\aleph_\xi<2^{\aleph_0}$）個ノ和ハ又測度 0 デアル」デ置換ヘルコトガ出来ル。

次ニ、今考ヘタ問題デハ正方形 $0\leqq x, y\leqq 1$ ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム集合Eヲ考ヘタノデアルガ、ソノ代リニ平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム集合ヲ考ヘルト次ノヤウナ事ガ云ハレル。

「Eヲ平面上ノ殆ンド凡テノ点カラナリ、シカモ原点 0 ヲ含ム集合トスルトキニ、Eニ含マレ、濃度ガ $2^{\aleph_0}$ デ、非可測デ、シカモ有理数体ニ関シテ modul ヲナスモノガ存在スル（但シ $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ヲ假定スル）」

証明　有理数ノ全体ヲ無限系列ニ列ベテ

$$r_1, r_2, \dots\dots, r_n, \dots\dots$$

トスル. 次ニ平面上ニアル測度 >0 ノ有界完全集合ノ全

体ハ濃度ガ $2^{\aleph_0}$ デアルカラ、$2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ニ依ッテ、此等ヲ Ω-sequence

$$P_1,\ P_2,\ \cdots\cdots,\ P_\alpha,\ \cdots\cdots \qquad (\alpha<\Omega)$$

ニ列ベルコトガ出来ル、其処デ点列 z_α $(\alpha<\Omega)$ ヲ次ノ様ニ定義スル。$\prod_{n=1}^{\infty} r_n E$ ハ E ノ性質カラ平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム．夫故ニ $P_1 \prod_{n=1}^{\infty} r_n E$ ハ又空デナイ．此中ノ一点ヲ z_1 トスル．スルト

(1) $z_1 \in P_1$

(2) r ヲ任意ノ有理数トスルトキニ $rz_1 \in E$ ガ成立ツ。

今 z_β $(\beta<\eta<\Omega)$ ガ定義セラレテ

(3) $z_\beta \in P_\beta$

(4) $r_1 z_{\beta_1} + r_2 z_{\beta_2} + \cdots\cdots + r_n z_{\beta_n}$ (r_K ノ有理数 $\beta_K<\eta$) ハ E ニ含マレル。

ガ成立ツトスル．其処デ

$$\prod_{\beta_K<\eta} (r_1 z_{\beta_1} + r_2 z_{\beta_2} + \cdots\cdots + r_n z_{\beta_n} + E)$$

ヲ作ル．$r_1 z_{\beta_1} + \cdots\cdots + r_n z_{\beta_n}$ ノ集合ハ可附番デアルカラ、此ノ集合ハ平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム．今コレニ含マレ、シカモ P_η ニ含マレル一点ヲ z_η トスル。然ルトキニハ $r_1 z_{\beta_1} + \cdots\cdots + r_n z_{\beta_n} + r z_\eta$ $(\beta_K<\eta)$ ハ E ニ含マレル。夫故ニ此ノ様ニシテ得ラレタ z_η $(\eta<\Omega)$ ノ全体カラ作ラレル modul $\mathfrak{M}$ ヲ考ヘレバ，$\mathfrak{M} \leq E$ ガ成立チ、シ

カモ $\mathfrak{M}$ ノ濃度ハ $2^{\aleph_0}$ デアル。

次ニ $\mathfrak{M}$ ガ非可測デアルコトヲ示ス。$\mathfrak{M}$ ノ外測度ガ 0 デナイコトハ平面上ノ凡テノ測度 >0 ノ有界完全集合ト $\mathfrak{M}$ トガ素デナイコトヨリ明カデアル。次ニ $\mathfrak{M}$ ガ可測デアルトスレバ、原点ヲ通ル直線 L ヲ適当ニ選ンデ $\mathfrak{M}L$ ガ linear measure >0 ノ完全集合ヲ含ムヤウニ出来ル。然ルトキニハ H. Steinhaus ノ定理カラ L ノ凡テノ点ハ $\mathfrak{M}$ ニ含マレルコトニナル。従ッテ初メカラ E ヲ修正シテ E ガ原点ヲ通ル直線ヲ含マナイ様ニシテ置ケバ（例ヘバ、0 ヲ中心トシ半径 1 ノ円周上ノ点ヲ除ク）E ニ含マレル $\mathfrak{M}$ モ亦原点ヲ通ル直線ヲ含マナイコトニナリ、従ッテ $\mathfrak{M}$ ハ非可測デアル。　（証明完了）

トコロデ、Modul ニ対シテ此ノ様ナコトガ云ハレルト Körper ニ對シテハドウカト云フ問題ガ起ッテ来ル。コレニ對シテハ

「E ヲ gauss 平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ミ且ツ凡テノ real ノ有理數ヲ含ム集合トスル時ニ、E ニ含マレル濃度 $2^{\aleph_0}$ ノ体デ gauss 平面上ノ任意ノ測度 0 ノ集合ト高々可附番個ノ要素ヲ共有スルモノガ存在スル（$2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ヲ假定スル）」

証明.　gauss 平面上ニアル測度 0 ノ G_δ 集合ノ全体ハ濃度ガ $2^{\aleph_0}$ デアルカラ、$2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ニ依ッテ此等ノ集合ヲ Ω-sequence.

$$Q_1,\ Q_2,\ \cdots\cdots,\ Q_\alpha,\ \cdots\cdots \qquad (\alpha<\Omega)$$

ニ列ベルコトガ出来ル。又 gauss 平面上ノ凡テノ点ハ $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ニ依ッテ Ω-sequence.

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_\alpha,\ \cdots\cdots \qquad (\alpha<\Omega)$$

ニ列ベル事ガ出来ル。其処デ $\{z_\alpha\}$ $(\alpha<\Omega)$ ヲ帰納法ニ依ッテ次ノ様ニ定メル。

有理数ヲ係数トスル有理函数ノ全体ハ $\aleph_0$ デアル. 今夫等ヲ

$$R_1(x),\ R_2(x),\ \cdots\cdots,\ R_n(x),\ \cdots\cdots$$

トスル. 其処デ $\underset{x}{E_{ns}}\{R_n(x)\in E-Q_1\}$ ヲ考ヘル. $E-Q_1$ ハ gauss 平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ムカラ、此ノ集合モ gauss 平面上ノ殆ンド凡ベテノ点ヲ含ム、夫故ニ

$$\prod_{n=1}^{\infty} \underset{x}{E_{ns}}\{R_n(x)\in E-Q_1\}$$

ハ空デナイ. 此集合ノ一点ヲ z_1 トスル. 然ルトキニハ定義カラ

(1) $z_1 \in E-Q_1$

(2) $R_n(z_1)\in E$

デアル。

次ニ z_α $(\alpha<\eta<\Omega)$ ガ既ニ定義セラレタトスル. z_α $(\alpha<\eta)$ 全体ノ集合ヲ Z_η ト置キ

$$S_\eta=\sum_{\alpha<\eta} Q_\alpha$$

トスル。 $Z_\eta+S_\eta$ ハ又測度 0 ノ集合デアル。 トコロデ

$\mathcal{R}(z_\alpha(\alpha<\eta))$（有理数体ニ $z_\alpha(\alpha<\eta)$ ヲ adjoin シテ得ラレル体）ヲ係数域トスル x ノ有理函数ノ全体ハ可附番個デアル。夫等ヲ

$$R_1^*(x),\ R_2^*(x),\ \cdots\cdots,\ R_n^*(x),\ \cdots\cdots$$

トスル。$Z_\eta+S_\eta$ ハ測度 0 デアルカラ $E-(Z_\eta+S_\eta)$ ハ又 gauss 平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム、夫レ故ニ $\underset{x}{\mathrm{E}_{ns}}\{R_n^*(x)\in E-(Z_\eta+S_\eta)\}$ ハ又 gauss 平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム。従ッテ

$$\prod_{n=1}^{\infty}\underset{x}{\mathrm{E}_{ns}}\{R_n^*(x)\in E-(Z_\eta+S_\eta)\}$$

ハ空デナイ。コノ中ノ一点ヲ z_η トスル。然ルトキニハ

(3) $\quad R_n^*(z_\eta)\in E$

(4) $\quad R_n^*(z_\eta)\in Q_\alpha \quad (\alpha<\eta)$

ガ成立ツ。此様ニシテ得ラレタ $z_\eta\ (\eta<\Omega)$ ノ全体カラ作ラレル体 K ガ求メルモノデアル。夫レハ次ノ様ニシテ判ル。K ノ濃度ガ $2^{\aleph_0}$ デアルコトハ $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ヨリ明カデアル。又、$K\leq E$ ノ成立ツコトハ自明デアル。次ニ gauss 平面上ニアル測度 0 ノ集合 F ヲ考ヘル。然ルトキニハ $F\leq Q_\alpha$ ノ成立スル Q_α ガ存在スル。従ッテ (4) ヨリ F ニ含マレル K ノ要素ハ $\mathcal{R}(z_\beta(\beta<\alpha))$ ニ属スル。此ノ事カラ F ニ含マレル K ノ要素ノ集合ハ高々可附番デアル。即チ K ガ求メル体デアル。　　　　（証明完了）

此処デ「測度 0 ノ集合トハ高々可附番個ノ点ヲ共有スル」ト云フ條件ノ説明ヲシナケレバ判ラナイカモ知レナ

イガ、コレハ W. Sierpiński ニ依ッテ性質（S）ト呼バレルモノデ、コレカラ仲々面白イコトガ云ハレル。

「R ノ凡テノ非可附番部分体ハ非可測デアル、従ッテ R 自体モ非可測デアル」

証明．R_0 ヲ R ノ非可附番部分体トスルトキニハ性質（S）ニ依ッテ測度 >0 デアル。ソレ故ニ R_0 ガ可測デアレバ、R_0 ノ測度ハ正トナリ、従ッテ R_0 ノ中ニ測度 0 ノ完全集合ガ含マレナケレバナラナイ、コレハ性質（S）ニ矛盾スル。故ニ R_0 ハ非可測デアル。（証明完了）

夫レデハ R ノ中ニ非可附番部分体ガ存在スルデアラウカ、コレニ対シテ

「R ノ中ニ $2^{\aleph_0}$ 個ノ互ニ相異ル非可附番部分体ヲ作ッテ、相異ル二ツガ real ノ有理数ノミヲ共有スルヤウニ出来ル。」

証明[1]. R ノ濃度ハ $2^{\aleph_0}$ デアルカラ、其ノ要素ヲ Ω_c-sequence（Ω_c ハ濃度 $2^{\aleph_0}$ ノ最小ノ順序数）

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_\alpha, \ldots\ldots \qquad (\alpha < \Omega_c)$$

ニ列ベルコトガ出来ル。其処デ $z_{\alpha\beta}$ $(\alpha \leqq \beta < \Omega_c)$ ヲ次ノヤウニ定メル。先ヅ $z_{11} = x_1$ ト置ク。今 $z_{\alpha\beta}$ $(\alpha < \xi)$ 及ビ $z_{\xi\beta}$ $(\beta < \eta)$ ガ定義サレタトスル。然ルトキニハ $R(z_{\alpha\beta}\ (\alpha<\xi),\ z_{\xi\beta}\ (\beta<\eta))$ ノ濃度ハ $2^{\aleph_0}$ ヨリ

(1) 守屋美賀雄氏ニ負フ所ガ多イ。

小デアル。従ッテ此体ニコレニ関スル凡テノ代数的数ヲ附加シテ得ラレル体モ濃度く $2^{\aleph_0}$ デアル。故ニ $\mathfrak{X}_\alpha$ ノ中ニ此ノ新シイ体ニ含マレヌモノガ存在スル．其ノ中デ指数ノ最小ノモノヲ $\xi_{\xi\eta}$ トスル．コノ様ニシテ得ラレタ $\xi_{\xi\eta}$ ニ対シテ体 $R(\xi_{\xi\eta}\,(\xi: fix))$ ノ全体ヲ考ヘル．コレガ求ムル部分体デアルコトハ明カデアル。　　（証明完了）

次ニ R ノ類ニ関スル性質トシテハ

「R ハ toujours de première catégorie デアル．即チ任意ノ完全集合ニ関シテ R ハ第一類デアル」

証明．　今 P ヲ gauss 平面上ニアル完全集合トスル．PR ノ測度ガ 0 ノ時ニハコレハ高々可附番デアルカラ、PR ハ勿論 P ニ於テ第一類デアル．次ニ PR ノ外測度 >0 ノ時ヲ考ヘル．コノ時ニハ PR ノ marsgleichhülle H ヲ定メテ $H \subseteq P$ ト出来ル．然ルニ H ノ中ニ測度 >0 ノ non dense ノ完全集合ガ存在スル故ニ第一類集合 J ヲ定メテ $H-J$ ガ測度 0 デアル様ニナシ得ル．従ッテ

$$PR = PRJ + PR(H-J)$$

ガ成立チ、$PR(H-J)$ ハ高々可附番デアルカラ PR ハ又 P ニ於テ第一類デアル．即チ、R ハ toujours de première catégorie デアル。　　（証明完了）

此ノ事カラ E ノ中ニ非可測デ第一類ノ体ノ含マレルコトガ判ッタガ、同様ニシテ E ガ gauss 平面ノ到ル所デ第二類デシカモ Baire ノ性質ヲ有スルトキニ、E ノ中ニ Baire ノ性質ヲ有シナイデ測度 0 ノ体ガ存在スルコト

が示サレル．又

「Eが gauss 平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ミ到ル所第二類デシカモ Baire ノ性質ヲ有スナレバ、Eノ中ニ非可測デ Baire ノ性質ヲ有シナイ体が存在スル（$2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ヲ仮定スル）」

が云ハレル。

此様ナ事ヲ続ケテ行クト更ニ結果が出セルが、此処デハコレダケニ止メテ置キタイト思フ。

追記：　性質(S)ヲ有スル体ノ存在ニ関シテハ

「Kヲ非可測ノ体トスル時ニ、Kニ含マレKト同ジ massgleichhülle ヲ有シ、シカモ性質(S)ヲ有スル体が存在スル。」

が成立スルノデ、コレヲ使ッテEノ中ニ性質(S)ヲ有スル体ノ存在ヲ示スノが常道デアルト思フ．此命題ハ次ノ様ニシテ証明セラレル。

Kノ要素ヲ Ω-sequence

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_\alpha,\ \cdots\cdots \qquad (\alpha<\Omega)$$

ニ列べ、Kノ massgleichhülle ニ含マレル測度0ノ G_δ 集合、測度>0ノ完全集合ヲ夫々 Ω-sequence

$$Q_1,\ Q_2,\ \cdots\cdots,\ Q_\alpha,\ \cdots\cdots \qquad (\alpha<\Omega)$$

$$P_1,\ P_2,\ \cdots\cdots,\ P_\alpha,\ \cdots\cdots \qquad (\alpha<\Omega)$$

ニ列ベル．其処デ K_α $(\alpha<\Omega)$ ヲ次ノ様ニ定メル．

有理数ヲ係数トスルxノ有理函数ヲ列ベテ

$$R_1(x),\ R_2(x),\ \cdots\cdots,\ R_n(x),\ \cdots\cdots$$

トスル。其処デ $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{x}{E}_{ns}(R_n(x) \in Q_1)$ ヲ考ヘル。コレハ測度 0 デアル。従ッテ，コレニ含マレナイ $P_1 \mathfrak{K}$ ノ点 x_γ ガアル。ソノ中デ γ ノ最小ノモノヲ ξ_1 トスル。明カニ

(1) $R_n(\xi_1) \overline{\in} Q_1$

デアル。今 ξ_α ($\alpha < \eta < \Omega$) ガ定義セラレテ

(2) $\xi_\alpha \in P_\alpha$

(3) $\mathfrak{K}(\xi_\beta\ (\beta < \alpha < \eta))$ ヲ係数域トスル x ノ有理函数 $R(x)$ ニ對シテ $R(x_\alpha) \overline{\in} Q_\beta$ ($\beta \leqq \alpha$)

ガ成立スルトスル。其処デ $\mathfrak{K}(\xi_\alpha\ (\alpha < \eta))$ ヲ係数域トスル x ノ有理函数ヲ列ベテ

$R_1^*(x),\ R_2^*(x),\ \cdots\cdots,\ R_n^*(x),\ \cdots\cdots$

トスル。然ルトキニハ

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{x}{E}_{ns}\left(R_n^*(x) \in \sum_{\alpha \leqq \eta} Q_\alpha\right)$$

ハ測度 0 デアル。今 $P_\eta \mathfrak{K}$ ニ含マレテ S ニ含マレナイ要素 x_γ ガ存在スル。ソノ中デ γ ノ最小ノモノヲ ξ_η トスル。然ル時ニハ

(4) $\xi_\eta \in P_\eta$

(5) $R_n^*(\xi_\eta) \overline{\in} Q_\alpha$ ($\alpha \leqq \eta$)

デアル。此様ニシテ與ヘラレル ξ_α ($\alpha < \Omega$) カラ作ラレル体ガ求メルモノデアルコトハ前ノ時ト同様デアル。

(証明完了)

此処デ尚一ツ注意シテ置キタイコトハ

「Gauss平面ト同ジMassgleichheitヲ有シ、realノ有理数ヲ含ム集合EデR（有理数ヨリ成ル体）以外ニ体ヲ含マナイモノガ存在スル。」

デアル．コレヲ証明スルタメニ測度＞0ノ完全集合ヲΩ_c-sequenceニ列ベテ

$$P_1,\ P_2,\ \cdots\cdots,\ P_\alpha,\ \cdots\cdots \qquad (\alpha<\Omega_c)$$

トスル．P_1ノ一点ヲz_1トスル．z_α $(\alpha<\eta<\Omega_c)$ガ定義セラレテ (1) $z_\alpha\in P_\alpha$, (2) 0, z_αノ定メル直線ガ互ニ相異ルトスル．今直線$0\,z_\alpha$ $(\alpha<\eta)$上ニナイP_ηノ一点ヲz_ηトシ$R+\sum_{\alpha<\Omega_c}(z_\alpha)$ヲ考ヘル．コレガ求メル集合デアルコトハ容易ニ判ル。