970 函數方程式
$$f(x+y)+g(x-y)=2h(x)+2k(y)$$
二就イテ

春木　博(神戸高等商船)

今，函數方程式

(1)　$f(x+y)+g(x-y)=2h(x)+2k(y)$

ノ可測解 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

(1)ニヨリ

$$k(y)=\frac{1}{2}\{f(z+y)+g(z-y)-2h(z)\}$$

故ニ　$k(x+y)+k(x-y)$

$$=\frac{1}{2}\{f(z+x+y)+g(z-x-y)-2h(z)$$
$$+f(z+x-y)+g(z-x+y)-2h(z)\}$$

シカルニ(1)ニヨリ

$$f(z+x+y)+g(z-x+y)=2h(z+y)+2k(x)$$
$$f(z+x-y)+g(z-x-y)=2h(z-y)+2k(x)$$

ナル故

$$k(x+y)+k(x-y)$$
$$=2k(x)+h(z+y)+h(z-y)-2h(z)$$

$h(z+y)+h(z-y)-2h(z)=2p(y)$ トオケバ

(2)　$k(x+y)+k(x-y)=2k(x)+2p(y)$

(2)ハ筆者ノ本誌954談話「二次式ノ函數方程式ニ關シテ」ニ於テ論ジタル函數方程式ナル故、a, b, c ヲ任意ノ實常數トシタルトキ

(3) $k(x) = ax^2 + bx + c$

$p(x) = ax^2$

故ニ又 $h(x+y) + h(x-y) = 2h(x) + 2ay^2$

之ヨリ d, e ヲ任意ノ實常數トシタルトキ

(4) $h(x) = ax^2 + dx + e$

(3), (4) ヲ (1) ヘ代入スレバ

(5) $f(x+y) + g(x-y)$

$$= 2(ax^2 + dx + e) + 2(ay^2 + by + c)$$

$y = 0$ トオケバ

$$f(x) + g(x) = 2(ax^2 + dx + e) + 2c$$

故ニ $g(x) = 2(ax^2 + dx + e + c) - f(x)$

上式ヲ (5) ヘ代入スレバ

$$f(x+y) - f(x-y) = 4axy + 2(b+d)y + 2c$$

$y = 0$ トオケバ

$y = x$ トオケバ $f(2x) = 4ax^2 + 2(b+d)x + l$

$\therefore\ f(x) = ax^2 + (b\ \ d)x \qquad (l = f(0)$ トオク$)$

$\therefore\ f(x) = ax^2 + (b+d)x + l$

結局 a, b, d, e, l ヲ任意ノ實常數トスルトキ

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + (b+d)x + l \\ g(x) = ax^2 - (b-d)x + 2e - l \\ h(x) = ax^2 + dx + e \\ k(x) = ax^2 + bx \end{cases}$$

（完）