968 Topological space ノ Regularity 特ニ Complete regularity ニツイテ

乙 部　好 一（東大學生）

§1. topological space ノ regularity ニツイテ.

R ヲ任意ノ Hausdorff space（即チ R ノ相異ル任意ノ二点ハ相素ナル近傍ヲ有スル topological space）トスル. R ノ一点 p ノ任意ノ近傍 $U(p)$ ニ對シ, $U(p) \supset \overline{V}(p)$（bar ハ closure ヲ示ス）ナル p ノ近傍 $V(p)$ ガ存在スルトキ p ヲ regular point トイヒ, Hausdorff space R ノ任意ノ点ガ regular point デアルトキ, R ハ regular space ト呼バレルガ, 此ノ Trennungsaxiom ヲ少シク精シク調ベテミタイ. 其ノタメニ先ヅ概念的ニ次ノ定義ヲスル。

定義1. index ノ ordered set I ガ順序型 μ ヲモツトスル. Hausdorff space R ノ一点 p ノ任意ノ近傍 $U(p)$ ニ對シテ, I ノ各要素 ι ニ對應スル p ノ近傍 $V_\iota(p)$ ガ存在シテ（I ノ $\{V_\iota(p)\}$ ヘノ mapping ハ one-to-one ナルヲ要シナイ）.

(1) 任意ノ $\iota \in I$ ニツキ　$U(p) \supset \overline{V}_\iota(p)$

(2) $\iota, \kappa \in I$, $\iota < \kappa$ ナラバ　$V_\iota(p) \supset \overline{V}_\kappa(p)$

ナルトキノ点 p ハ Trennungsaxiom $T(\mu)$ ヲ満足スル或ハ $T(\mu)$-point デアルト呼ブ. R ノ各点ガ $T(\mu)$-point

ナルトキ R ハ $T(\mu)$-space デアルトイフ.（点 p ノ近傍トハ p ヲ含ム R デノ open set デアルトスル即チ absolute ナ近傍系ヲ特ニ断ラナイ限リ考ヘルコトニスル）

注意1. 特ニ $\mu=0$ 即チ I ガ空集合デアルトキヲモ考ヘルコトニスレバ, Hausdorff space トハ $T(0)$-space ナルコトニ外ナラナイ。ナホ I ノイヅレノ要素ニモ先立ツ 0 ナル index ヲ附加シテ上記定義ニ於ケル $U(p)$ ヲ $V_0(p)$ トオケバ, 形式的ニ條件 (1) ハ不要トナル。

注意2. R ノ一点 p ガ regular point デアルコトハ $T(1)$-point デアルコトデアルガ, 夫ハ $T(\omega)$-point（ω ハ凡テノ自然數ヲ通常ノ順序ヲ付ケタトキノ順序型）デアルコトニ同値デアル. 何トナレバ $T(\omega)$ ガ成立スレバ勿論 $T(1)$ ガ成立スルガ, 逆ニ $T(1)$ ナラバ p ノ任意ノ近傍 $U(p)$ ニ對シテ $U(p)\supset\overline{V_1(p)}$ ナル近傍 $V_1(p)$ ガアル. ヨッテ亦 $T(1)$ ニヨリ $V_1(p)\supset\overline{V_2(p)}$ ナル近傍 $V_2(p)$ ガ存在スル. カクシテ p ハ $T(\omega)$ ヲ満足スルコトニナル。一般ニ $T(\mu+1)$-point ハ $T(\mu+\omega)$-point 及ビ $T((\mu+1)\omega)$-point ニ同ジイ. 例ヘバ $T(\omega^*)$ ハ $T(\omega^*+\omega)$ ト同値デアル。

$\mu\neq 0$ ナラバ $T(\mu)$-space ハ勿論 regular space デアル。

定理1. completery regular space ト $T(\eta)$-space トハ相等シイ. 但シ η ハスベテノ有理數

ヲ通常ノ大小ニ從ッテ順序ヅケタトキノ順序型デアル。

(証明) R ガ completely regular デアルトスル。任意ノ点 $p \in R$ ノ任意ノ近傍 $U(p)$ ヲトルモ $0 \leqq f(x) \leqq 1$ $(x \in R)$, $f(p) = 1$, $x \in R - U(p)$ ナラバ $f(x) = 0$ ナル R ニ於ケル連続函数 f ガ存在スル。$0 < r < 1$ ナル凡テノ有理数 r ノ集合ヲ I トシ, $r < r'$ ヲ $r < r'$ ニヨリ定義スレバ I ノ順序型ハ η デアル。$f(x) > r$, $r \in I$ ナル $x \in R$ ノ集合ヲ V_r トスレバ, 明カニ V_r ハ p ノ近傍デ $r < r'$ ナラバ $V_r \supset \overline{V_{r'}}$ 且ッ $U(p) \supset \overline{V}_r$ デアル。ヨッテ p ハ $T(\eta)$-point デアル。

逆ニ Hausdorff space R ノ任意ノ点 p ガ $T(\eta)$ ヲ満足シテヰルトスル。p ヲ含マナイ R ノ任意ノ closed set A ヲトルモ $U(p) = R - A$ ハ p ノ近傍ヲナスカラ, $T(\eta)$ ニヨリ $0 < r < r' < 1$ ナル任意ノ有理数 r, r' ニ對シ (η ハ夫ト逆ノ順序ヲツケタ η^* ト相等シイコトニ注意)

$$U(p) > \overline{V_{r'}(p)}, \quad V_{r'}(p) \supset \overline{V_r(p)}$$

ナル p ノ近傍 $V_r(p), V_{r'}(p)$ ガ存在スル。カカル以上ハ $f(p) = 0$, $f(A) = 1$, $0 \leqq f(x) \leqq 1$ $(x \in R)$ ナル R ニ於ケル連續函数 f ヲ構成スルコトガ出来ルコトハ, normal space ニ於ケル連続函数ノ interpolation theorem ト全ク同様デアル。ヨッテ R ハ completely regular デアル。

以上ノ様ナ regularity ノ type ガ topologically ニドノ様ナ意味ヲモツカ, 又ハ regularity ニ對スル如何

様ナ分類ヲナシテキルカヲ次ニ考ヘテミタイ。

§2. regularity ノ type ト一般化セラレタ absolute closedness トノ関係.

Hausdorff space ノ "absolutely closed" (H-abgeschlossen) ナル概念ヲ §1 ニテ定義シタ regularity ノ各 type ニ拡張スル.

<u>定義2</u> μ ヲ一ツノ順序型トスル. Hausdorff space R ガ $\mathfrak{R} \supset R$ ナル<u>任意ノ</u> Hausdorff space $\mathfrak{R}$ ニツキ, $\mathfrak{R}-R$ ニ含マレル<u>任意ノ</u> $T(\mu)$-point p ニ対シテモ $p \neq \overline{R}^{\mathfrak{R}}$ ($-\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ於ケル closssen ヲ表ス) ナルトキ R ハ $T(\mu)$-closed デアルトイフ。

特ニ $\mu=0$ トスレバ, $T(0)$-closed トハ absolutely closed ナルコトデアル. R ガ $T(0)$-closed デアルナラバ任意ノ順序型 μ ニツイテモ $T(\mu)$-closed デアルガ, 逆ハ一般ニ成立シナイ。

最モ標準的ナ μ ノ category トシテ次ノ定義ヲ假ニ定メルコトニスル。

<u>定義3</u> 順序型 μ ト逆ノ順序ヲモツ順序型ヲ μ^* ニテ表ハス. $\mu^*=\mu$ ナルトキ μ ハ inversible デアルトイフコトニスル. 又順序型 μ ヲモツ ordered set I ノ任意ノ要素 $\iota \in I$ ニ對シテ, $\iota < \kappa$, $\kappa \in I$ ナル κ ノ集合 I_ι ガ, I ト同ジ順序ニ関シテ, 順序型 μ ヲ有スルナラバ, μ ハ uniform ト呼ブコトニスル (コノ定義ガ I ノ取方ニ関係シナイコトハ明カ)

例ヘバ $0, \omega, \eta, \omega^2, \omega\eta, \eta\omega$ ハ uniform ナ順序型デアリ; $0, \eta, \omega^*+\omega$ ハ inversible デアル. 0 ナラザル自然數 n ハ inversible デアルガ, uniform デハナイ。

Hausdorff space ガ absolutely closed ナルタメノ條件ヲ示ス定理 (cf. Alexandroff Hopf. Topologie S. 90) ハ次ノ様ニ拡張サレル。

<u>定理2</u>. μ ハ uniform ナ順序型トシ, μ ナル順序型ヲモツ index ノ ordered set I ヲトル。

(a) Hausdorff space R ガ $T(\mu)$-closed ナラバ次ノ條件 ($C(\mu)$) ガ成立スル:

($C(\mu)$): $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ ハ或ル index ノ集合) ガ R ノ任意ノ open covering (G_α ハ R ノ open set) デアルトスレバ —— 即チ $\sum_{\alpha \in \mathfrak{M}} G_\alpha = R$ ナラバ ——, 各 $\alpha \in \mathfrak{M}$ ニ對シ

(i) $\iota \in I$ ナラバ $\quad G_\alpha = U_{\alpha 0} \subset U_{\alpha\iota}$

(ii) $\iota, \kappa \in I$, $\iota < \kappa$ ナラバ $\quad \overline{U_{\alpha\iota}} \subset U_{\alpha\kappa}$

ナル R ノ open set ノ<u>任意ノ</u> system $\{U_{\alpha i}\}$ ($\alpha \in \mathfrak{M}$, $\iota \in I$) ヲトレモ, $\{G_\alpha\}$ ノ或ル有限個ノ subset $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots \cdots, G_{\alpha_N}$ ト或ル $\iota_0 \in I$ トヲ選ミ

$$\text{(iii)} \quad \sum_{j=1}^{N} \overline{U_{\alpha_j \iota_0}} = R$$

ナラシメルコトガ出来ル。

(b) 逆ニ $T(\mu^*)$-space R ガ條件 $(C(\mu))$ ヲ滿足シテキルナラバ R ハ absolutely closed デアル（從ッテ勿論 $T(\mu)$-closed デアル）.

（証明）〔前半 (a) ノ証明〕歸謬法ニヨル. 今モシ條件 $(C(\mu))$ ガ成立シナイトスル. 然ラバ R ノ<u>或ル</u> open covering $\{G_\alpha\}$ $(\alpha\in\mathfrak{M})$ ガアッテ, 各 α ニツキ (i), (ii) ヲ滿足スル<u>或ル</u> open set ノ system $\{U_{\alpha\iota}\}$ ガ存在シテ, $\mathfrak{M}$ ノ<u>任意</u>ノ<u>有限個ナ</u> subset $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ 及ビ<u>任意</u> <u>ノ</u> $\iota\in I$ ニ對シ

$$(1)\qquad \sum_{j=1}^{n}\overline{U_{\alpha_j\iota}}\neq R$$

ソコデ R ニ屬シナイ一点 ξ ヲトリ, $\mathcal{R}=R+\xi$ ナル set ニ次ノ様ナ topology ヲ於スル;

R ニ屬スル任意ノ点ノ近傍系ハ R ニ於テアッタ通リトシ, ξ ノ決定近傍系トシテ

$$(2)\qquad V(\xi)=\xi+\Big(R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U_{\alpha_j\iota}}\Big),\quad \alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n\in\mathfrak{M},\ \iota\in I$$

ヲトル. R ノ点ニツイテハ明カデアルカラ, ξ ニツイテ其ノ近傍系 (2) ガ近傍系ノ公理ヲ滿足シテキルコトヲ示サウ. ξ ノ任意ノ近傍 $V(\xi)$ ガ ξ ヲ含ムコトハ (2) ヨリ明カ. 又 ξ ノ任意ノ二ツノ近傍 (2) 及ビ $V(\xi)=\xi+\Big(R-\sum_{k=1}^{m}\overline{U_{\alpha_k\kappa}}\Big)$ ヲトレバ, $\kappa\leqq\iota$ カ $\iota\leqq\kappa$ デアルガ, 例ヘバ後者ヲトレバ,

$$w(\xi)=\xi+\left(R-\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j,\varkappa}+\sum_{k=1}^{m}\overline{U}_{\alpha_k k}\right)\right)$$

ハξノ決定近傍系ニ屬シ，且ツ (ii) ヨリ $\overline{U}_{\alpha_k\iota}\subset\overline{U}_{\alpha_k k}$ ($k=1,\cdots\cdots,m$) デアルカラ

$$w(\xi)\subset U(\xi)\cdot V(\xi)$$

次ニ $U(\xi)$ ヲ $p\neq\xi$ ナル任意ノ点 p ヲトレバ $p\in R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j,\iota}$ (i) 及ビ n ガ有限ナルコトヨリ $R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j\iota}$ ハ R ニ於ケル空ナラザル open set デアルカラ，$U(p)\subset R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j,\iota}\subset U(\xi)$ ナル点 p ノ R ニ於ケル近傍 $U(p)$ ガアル．$p\in R$ ダカラ $U(p)$ ハ $\mathcal{R}$ ニ於ケル p ノ近傍デアル。

以上ニヨッテ $\mathcal{R}=R+\xi$ ガ topological space ヲナスコトガ分ッタガ，更ニ $\mathcal{R}$ ガ Hausdorff space デアルコトハ，R ノ二点ニツイテハ明カダカラ，$p\in R$ ナル p ト ξ トガ相素ナル ($\mathcal{R}$ ニ於ケル) 近傍ヲ有スルコトヲ云ヘバヨイ。ソレハ $p\in G_{\alpha_1}$ ナル G_{α_1} ヲトリ，勝手ナ $\iota\in I$ ヲトレバ (i) ニヨリ $U_{\alpha_1\iota}$ ハ p ノ R ニ於ケル從ッテ $\mathcal{R}$ ニ於ケル近傍デアル．ヨッテ $U(\xi)=\xi+(R-\overline{U}_{\alpha_1\iota})$ ヲトレバ

$$U_{\alpha_1\iota}\cdot U(\xi)=0$$

ξ ガ $\mathcal{R}$ ニテ $T(\mu)$-point ナルコトヲ云ハウ．ξ ノ任意ノ近傍 (2) ヲトル．$\iota<\varkappa\in I$ ナル $\varkappa$ ノナス ordered set I_ι ハ，μ ガ uniform ナル假定ニヨリ，ヤハリ順序型 μ ヲモツ (定義 3) 而カモカヽル $\varkappa$ ニツキ $\left\{\xi+\left(R-\sum_{j=1}^{n}\overline{U}_{\alpha_j\varkappa}\right)\right\}$ ($\varkappa\in I_\iota$) ハ (ii) ニヨリ $U(\xi)$ ニ含

マレルξノ近傍ノ system ヲナシ且ツ $x < x'$ ナルトキ(ii)ヨリ $\sum_{j=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_j \cdot x} \subset \sum_{j=1}^{n} U_{\alpha_j \cdot x'}$ デアルカラ

$$\xi + \left(R - \sum_{j=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_j \cdot x}\right) \supset \xi + \left(R - \sum_{j=1}^{n} U_{\alpha_j \cdot x'}\right) = \xi + \overline{\left(R - \sum_{j=1}^{n} U_{\alpha_j \cdot x'}\right)}$$

$$\supset \xi + \overline{\left(R - \sum_{j=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_j \cdot x'}\right)} = \xi + \overline{\left(R - \sum_{j=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_j \cdot x'}\right)}^{\mathcal{R}}$$

$\left(R - \sum_{j=1}^{n} U_{\alpha_j x'} \right.$ ハ R ニテ closed ダカラ$\left.\right)$

ヨッテ定義 I ニヨリξハ $\mathcal{R}$ ニテ $T(\mu)$-point デアル. 而モ(1)ニヨリ任意ノ $U(\xi)$ ニツキ $RU(\xi) \neq 0$ ダカラ $\xi \in \overline{R}^{\mathcal{R}}$. ヨッテ定義2ニヨリ R ハ $T(\mu)$-closed デナイコトニナッテ假定ニ反スル。

(注意) 明カニ R ハ $\mathcal{R} = R + \xi$ ノ dense ナ subset デアリ, 且ツ R ノ点ノ近傍ハ $\mathcal{R}$ ニ於テモ R (relative space トシテ) ニ於テモ不変デアル. 此事ハ後ニ用ヰル.

(後半(B)ノ証明) $T(\mu^*)$-space R が條件 $(C(\mu))$ ヲ満足シテヰルトスル. $\mathcal{R}$ ヲ $\mathcal{R} \supsetneqq R$ ナル任意ノ Hausdorff space トシ, $\xi \in \mathcal{R} - R$ ナル任意ノ一点ξヲトル. $\mathcal{R}$ ハ Hausdorff space デアルカラ R ノ任意ノ点 p ニハ $\overline{U}^{\mathcal{R}}(p) \not\ni \xi$ ナル ($\mathcal{R}$ ニ於ケル) 近傍 $U(p)$ が存在スル. $RU(p)$ ハ R ニ於ケル p ノ近傍デアリ, R が $T(\mu^*)$-space デアルカラ, 定義 1 ニヨリ μ ナル順序型ノ ordered set I ニツキ

$$RU(p) \supset \overline{U}_\iota(p) \ni p, \qquad \iota \in I$$

且ツ $\iota, \kappa \in I$, $\iota < \kappa$ ナラバ $\overline{U}_\iota(p) \subset U_\kappa(p)$ ナル p ノ R ニ於ケル近傍ノ system $\{U_\iota(p)\}$ $(\iota \in I)$ ガ存在スル. 勝手ナ一ツノ $\gamma \in I$ ヲトレバ, μ ガ uniform デアルトイフ假定カラ（定義3） $\gamma < \iota \in I$ ナル ι ノ ordered set I_γ ガ亦順序型 μ ヲモツ. サテ $\{U_\gamma(p)\}$ $(p \in R)$ ハ R ノ open covering ヲナスカラ條件 $(C(\mu))$ ニ於テ I ノ代リニ I_γ ヲオキ代ヘレバ, 有限個ノ点 $p_1, \cdots p_N \in R$ ト $\iota_0 \in I_\gamma$ ナル或ル ι_0 ガ選ベバ

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{U}_{\iota_0}(p_j) = R$$

$\overline{U}_{\iota_0}(p_j) \subset RU(p_j) \subset U(p_j)$ ト $\overline{U}^{\mathfrak{R}}(p) \not\ni \xi$ トヨリ

$$\overline{R}^{\mathfrak{R}} = \overline{\sum_{j=1}^{N} \overline{U}_{\iota_0}(p_j)}^{\mathfrak{R}} \subset \sum_{j=1}^{N} \overline{U}^{\mathfrak{R}}(p_j) \not\ni \xi$$

ヨッテ $\mathfrak{R} - R$ ノ任意ノ点 ξ ハ $\overline{R}^{\mathfrak{R}}$ ニ含マレナイ. 即チ R ハ absolutely closed ($\mathrm{T}(0)$-closed) デアル（從ッテ $\mathrm{T}(\mu)$-closed デアル）

（証終リ）

上記定理ニ於テ $\mu = 0$ トスレバ —— $G_\alpha = U_{\alpha_0}$ ト形式的ニオイテ —— Hausdorff space ガ absolutely closed ナルタメノ必要且ツ十分條件ヲ示ス周知ノ定理トナル。

$\mu = \omega'$ トオケバ regular space R ガ其ノ上ノ任意ノ regular space ニテ closed ナルタメノ必要

條件ハ $(C(\omega))$ デアリ，更ニ R ガ $\mathfrak{T}(\omega^*)$-space（當然 $\mathfrak{T}(\omega^*+\omega)$-space デアル（定義1 注意2））ナラバ $(C(\omega))$ ハ十分條件デアル。

$\mu=\eta$ ナルトキハ，η ハ uniform 且ツ inversible $(\eta^*=\eta)$ デアルカラ，定理1ニヨレバ completely regular space R ガ其ノ上ノ任意ノ completely regular space ニテ closed ナルタメノ必要且十分條件ハ $(C(\eta))$ ガ成立スルコトデアル。

§3. 一般化セラレタ absolute closedness ト bicompactness トノ關係.

定理2ノ條件 $(C(\mu))$ ニヨッテ一般化セラレタ absolute closedness ト bicompactness トノ間ニモ密接ナ關係ガアルコトガ分ル．即チ

<u>定理3.</u> μ ガ 0 ナラザル uniform ナ順序型デアルナラバ，$\mathfrak{T}(\mu^*)$-space R（$\mu\neq 0$ ヨリ R ハ regular デアル）ガ bicompact デアルタメノ必要且ツ十分ナ條件ハ R ガ $\mathfrak{T}(\mu)$-closed ナルコトデアル。

（證明）必要ナルコト．定理2ノ條件 $(C(\mu))$ ニ示サレタ如ク，R ノ任意ノ open covering $\{G_\alpha\}$ $(\alpha\in\mathfrak{M})$ ト (i), (ii) ヲ滿足スル任意ノ open set ノ system $\{U_{\alpha_\iota}\}$ $\iota\in I$ ヲトル。$\{G_\alpha\}$ ガ R ノ open covering ダカラ，R ノ bicompact ナルコトヨリ有限個ノ $G_{\alpha_1},\cdots\cdots,G_{\alpha_N}$ ヲトリ R ヲ cover スルコトガ出來ル．ヨッテ勿論 $(C(\mu))$.

ノ (iii) ガ成立スル．即チ $(C(\mu))$ ガ成立スルカラ定理2(b) ニヨリ R ハ $T(\mu)$-closed (実ハ absolutely closed) デアル．(之迄ハ $\mu \neq 0$ ナル條件ハ使ッテナイカラ $\mu=0$ ニテモ成立スル)

十分ナルコト．R ガ $T(\mu)$-closed デアルトスル．定理2ニヨリ條件 $(C(\mu))$ ガ成立スル．今 R ノ任意ノ open covering $\{G_\rho\}$, $\rho \in \mathfrak{R}$, $\sum_{\rho \in \mathfrak{R}} G_\rho = R$ ヲトル．R ノ任意ノ点 p ニ對シ $p \in G_\rho$ ナル $\rho \in \mathfrak{R}$ ノ一ツヲ $\rho(p)$ トスル．$G_{\rho(p)}$ ハ open 故カラ $U(p) \subset G_{\rho(p)}$ ナル p ノ近傍 $U(p)$ ガアル．R ハ $T(\mu^*)$-space デアルカラ定義1ニヨリ

$$(1) \quad U_\iota(p) \ni p, \quad U(p) \supset \overline{U}_\iota(p), \quad \iota \in I$$

(I ハ μ ナル順序型ノ index set)

且ツ $\iota, \kappa \in I$, $\iota < \kappa$ ナラバ $\overline{U_\iota}(p) \subset U_\kappa(p)$ ナル近傍ノ system $\{U_\iota(p)\}$, $\iota \in I$ ガ存在スル．假定 $\mu \neq 0$ ニヨリ $\{U_\iota(p)\}$ ハ空デナイ．定理2(a) ノ証明ノ際ト同様ニ $\gamma \in I$ ヲトレバ $\gamma < \iota \in I$ ナル ι ノ集合 I_γ ハ μ ナル順序型ノ ordered set ヲナスカラ條件 $(C(\mu))$ ニテ $\{U_\gamma(p)\}$ ヲ $\{G_\alpha\}$ トオケバ，アル有限個ノ点 $p_1, \cdots\cdots, p_N$, トアル $\gamma < \iota_0 \in I_\gamma$ ナル ι_0 ニツキ

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{U}_{\iota_0}(p_j) = R$$

ヨッテ (1) ニヨリ

$$\sum_{j=1}^{N} G_{\beta(p_j)} \supset \sum_{j=1}^{N} U(p_j) \supset \sum_{j=1}^{N} \overline{U}_{\iota_0}(p_j) = R$$

即チ有限ノ subsystem $\{G_{\beta(p_j)}\}$ $(j=1,\cdots\cdots,N)$ ハ R ノ covering ヲナシテキルカラ R ハ bicompact デアル。

系. μ ガ 0 ナラザル inversible 且ツ uniform ナ順序型ナルトキ（定義3），$T(\mu)$-space R ガ bicompact デアルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ R ガ $T(\mu)$-closed ナルコト即チ R ノ上ノ任意ノ $T(\mu)$-space ニテ R ガ closed ナルコトデアル。

特ニ completely regular space R ガ bicompact ナルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ R ガ R ノ上ノ任意ノ completely regular space ニテ closed ナルコトデアル。

（証明） $\mu \neq 0$ デ uniform ダカラ定理ガ適用出来，シカモ $\mu^* = \mu$ デアルカラ，後半ハ夫ガ上記條件ニ適スルカラ定理1ニヨリ．

§4. bicompact Hausdorff space ヘノ embedeling ニツイテ.

Lemma. Hausdorff space $\mathfrak{R}$ ノ dense ナ subset R ノ cardinal number ヲ $\aleph_\nu$ トスレバ，$\mathfrak{R}$ ノ cardinal number ハ $2^{2^{\aleph_\nu}}$ ヲ超エナイ。

（証明） $\mathfrak{R}$ ノ各点 p ニ，$\mathfrak{R}$ ニ於ケル p ノ凡テノ近傍

ノ system $\{U(p)\}$ ガ對應スル.

R ハ $\mathfrak{R}$ ニテ dense デアルカラ $RU(p) \neq 0$. ヨッテ $\{RU(p)\}$ ハ R (relative space トシテ) ニ於ケル空ナラザル open sets ノ system ヲナシテヰル. $p, q \in \mathfrak{R}$, $p \neq q$ トスレバ, $\mathfrak{R}$ ハ Hausdorff space デアルカラ $U_0(p)U_0(q)=0$ ナル $U_0(p)$, $U_0(q)$ ガアル. ヨッテ

(1) $RU_0(p)\cdot RU_0(q)=0$

任意ノ $U(p)$ ニツキ $U(p)U_0(p)$ ハ p ノ近傍デアルカラ, ヤハリ $R\cdot U(p)U_0(p)\neq 0$. ヨッテ

(2) $RU(p)\cdot RU_0(p)\neq 0$

(1), (2) ニヨリ任意ノ $U(p)$ ニツキ $RU(p)\neq RU_0(q)$. ヨッテ R ニ於ケル sets ノ system トシテ $\{RU(p)\}\neq\{RU(q)\}$. 故ニ, モシ $\{RU(p)\}=\{RU(q)\}$ ナラバ $p=q$.

所ガ R ノ cardinal number ハ $\aleph_\nu$ ダカラ R ノ凡テノ (open) subsets ヨリナル system ノ凡テノ集合ノ cardinal number ハ $2^{2^{\aleph_\nu}}$ ヲ超エナイ. ヨッテ $\mathfrak{R}$ ノ cardinal number モ $2^{2^{\aleph_\nu}}$ ヲ超エナイ。

定理4. μ ガ uniform 且ツ inversible ($\mu^*=\mu$) ナル順序型デアルナラバ, 任意ノ $T(\mu)$-space R ニハ次ノ二ツノ條件ヲ滿足スル $T(\mu)$-space $\mathfrak{R}$ ガ存在スル:

(1°) $\mathfrak{R}\supset R$, 且ツ R ハ $\mathfrak{R}$ ニテ dense デアル.

(2°) $\mathfrak{R}$ ハ $T(\mu)$-closed デアル (實ハ absolutely closed トナル)

若シ更ニ$\mu \neq 0$デアルナラバ此ノ$\mathfrak{R}$ハbicompact normalデアリ，且ツabsolutely closedデアル。

（證明）歸謬法ニヨル．即チ（1°），（2°）ヲ滿足スル$T(\mu)$-space $\mathfrak{R}$が存在シナイトスル。即チ條件(P)ヲ滿足スル任意ノ$T(\mu)$-space Rハ$T(\mu)$-closedデナイトスル。

然ラバ勿論Rハ（1°）ヲ滿足スル$T(\mu)$-spaceダカラ$T(\mu)$-closedデナイ。

今Rノcardinal numberヲ$\aleph_\nu$トシ，$2^{2^{\aleph_\nu}} < \aleph_\lambda$ナル一ツノcardinal number $\aleph_\lambda$ヲトリ，其ノAnfangszahlヲω_λトスル．シカラバ（$R = \mathfrak{R}_0$トオク）$0 \leqq \pi \leqq \omega_\lambda$ナル任意ノordinal number πニ對シテ次ノ條件ヲモツ$T(\mu)$-space $\mathfrak{R}_\pi$が存在スル：(a) $\mathfrak{R}_\pi$ハ（1°）ヲ滿足スル．(b) $0 \leqq \rho < \pi$ナル任意ノordinal number ρニツキ$\mathfrak{R}_\rho \subsetneqq \mathfrak{R}_\pi$デ，而モ$\mathfrak{R}_\rho$ニ屬スル任意ノ点ノ近傍ハ$\mathfrak{R}_\rho$ニ於テモ$\mathfrak{R}_\pi$ニ於テモ不変デアル，(c) $\mathfrak{R}_\pi$ハ$T(\mu)$-closedデナイ。

之レヲtransfinite inductionニヨッテ證明シヨウ．先ヅπが孤立数ナルトキ，特ニ$\pi = 0$ナルトキハ$\mathfrak{R}_0 = R$トオケバtrivialニ成立スル．$\neq 0$ノトキinductionノ假定ニヨリ$\pi - 1$ニツキ上記(a), (b), (c)が成立シテヰル．特ニ(C)ニヨリ$\mathfrak{R}_{\pi-1}$ハ$T(\mu)$-closedナラザル$T(\mu)$-spaceデアル．ヨッテ定理2(b)ト$\mu^* = \mu$

ニヨリ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ハ條件 $(C(\mu))$ ヲ滿足シナイ。ソコデ同ジク定理 2(a) ノ証明（特ニ（注意））ニ示サレタ如ク $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ 外ノ一点 ξ_π ヲトリ $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\pi-1} + \xi_\pi$ トオケバ $\mathfrak{R}_\pi$ ガ $T(\mu)$ — *space* デ且ツ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ガ $\mathfrak{R}_\pi$ デ *dense* デアリ，且ツ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ニ屬スル点ノ近傍ハ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ニテモ $\mathfrak{R}_\pi$ ニテモ不変ナルヤウナ $\mathfrak{R}_\pi$ ガ存在スル。

既ニ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ニ屬シテヰル点 p ノ任意ノ近傍ガ R ト空ナラザル共通部分ヲモツコトハ *induction* ノ假定ノ (a) ニヨツテ明カデアリ；又 ξ_π ノ任意ノ近傍 $U(\xi_\pi)$ ハ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ト少クモ一点 p ヲ共有スル；$\mathfrak{R}_{\pi-1} U(\xi_\pi)$ ハ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ノ点 p ノ近傍デアルカラ、今述ベタ所ニヨリ R ト素ニハナラナイ，從テ $U(\xi_\pi)$ モ R ト素ニナラナイ. 即チ R_π ニテ R ハ *dense* デアル. 之ニテ π ニツキ (a) ガ云ヘタ。

次ニ $0 \leqq \rho \leqq \pi$ ナル任意ノ $\mathfrak{R}_\rho$ ニツイテハ $\mathfrak{R}_\rho < \mathfrak{R}_{\pi-1} < \mathfrak{R}_\pi$ デ，又 $\mathfrak{R}_\rho$ ニ屬スル点ハ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ニモ屬シテヰルカラ *induction* ノ假定（$\pi-1$ ニ對スル）ノ (b) ニヨリ，ソノ点ノ $\mathfrak{R}_\rho$ ニ於ケル近傍ハ $\mathfrak{R}_{\pi-1}$ ニ於ケルモノト，從ツテ又上記 $\mathfrak{R}_\pi$ ノ構成ニヨリ $\mathfrak{R}_\pi$ ニ於ケルノト同一デアル。更ニ帰謬法ノ假定ニヨリ —— 且ツ $\mathfrak{R}_\pi$ ハ (1°) ヲ滿足スル $T(\mu)$-*space* デアルコトガワカッタカラ —— $\mathfrak{R}_\pi$ モ亦 $T(\mu)$-*closed* デナイ。

次ニ π ガ極限數デアルトスル。シカルトキ $\mathfrak{R}_\pi = \sum_{0 \leqq \rho < \pi} \mathfrak{R}_\rho$ トオキ，ソノ *topology* トシテ，任意ノ $p \in \mathfrak{R}_\pi$ ニツキ $p \in \mathfrak{R}_\rho$ ナル最小ノ ρ（*ordinal number* ノ性質

ニヨリ，タシカニ存在スル）ヲトリ $\mathfrak{R}_\rho$ ニ於ケル p ノ近傍ヲ以テ $\mathfrak{R}_\pi$ ニ於ケル p ノ近傍トスル induction ノ假定ニヨリ $\mathfrak{R}_\rho$ ハ $\mathrm{T}(\mu)$-space ダカラ p モ $\mathfrak{R}_\rho$ 從ッテ $\mathfrak{R}_\pi$ ニ於テ $\mathrm{T}(\mu)$ point デアル．p ハ任意デアッタカラ $\mathfrak{R}_\pi$ ハ $\mathrm{T}(\mu)$-space デアル．$\mathfrak{R}_\pi$ ガ (a), (b) ヲ満足スルコトモ容易ニ證明サレル。例ヘバ $0 \leq \rho < \pi$ トスレバ π ハ極限數ダカラ $\rho < \rho' < \pi$ ナル ρ' ガアル．ρ' ニツイテハ (b) ガ云ヘテキルカラ $\mathfrak{R}_\rho \subseteq \mathfrak{R}_{\rho'} \subset \mathfrak{R}_\pi$．(c) ハ (a) ト歸謬法ノ假定カラ明カデアル。 以上ニテ transfinite induction ハ完成シタ。

ヨッテ特ニ $\omega = \omega_\lambda$ トスレバ $\mathfrak{R}_{\omega_\lambda}$ ノ cardinal number ハ (b) ニヨリ $\geq \aleph_\lambda > 2^{2^{\aleph_\lambda}}$．所ガ (a) ト lemma ニヨリ夫ハ $\leq 2^{2^{\aleph_\nu}}$ デナケレバナラス．之レハ矛盾デアル。

ヨッテ定理ニ示サレタ $\mathfrak{R}$ ノ存在ガ證明出来タ．更ニ $\mu \neq 0$ ナルトキハ定理3ノ系ニヨリ，コノ $\mathfrak{R}$ ハ bicompact デアリ，且ツ regular space デアルカラ normal デアル，又 absolutely closed デアル。

（$\mu = 0$ ナラバ $\mathrm{T}(0)$-closed トハ absolutely closed デアルカラ実ハ $\mathfrak{R}$ ハ常ニ absolutely closed デアル）

特ニ $\mu = 0$ トオクト定理ノ前半ニヨリ

<u>系1.</u> 任意ノ Hausdorff space R ニハ，R ヲ dense ナ subspace トスル absolutely closed ナ

Hausdorff space $\mathcal{R}$が存在スル.

系2. 任意ノ completely regular space R ニハ, Rヲ dense ナ subspace トスル absolutely closed 且 bicompact ナ normal space $\mathcal{R}$ が存在スル。

(証明) η ハ uniform inversible デナイデアルカラ.

(注意) 定理4前半ニ於ケル$\mathcal{R}$デ, 互ニ homeomorphic デナイ二ツノ $\mathcal{R}_1$ ト $\mathcal{R}_2$ トが存在スルトスレバ, R ヲ固定スルヤウニシテ一方ヲ他方ニ embed スルコトハ出来ナイ。

何トナレバ, 例ヘバ $R \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ ト出来ルモノトスレバ $\mathcal{R}_2$ ニ関スル closure (bar ニテ表ハス) ニツイテ $\overline{R} \subset \overline{\mathcal{R}_1} \subset \mathcal{R}_2$. (1°) ニヨリ R ハ $\mathcal{R}_2$ デ dense デアルカラ $\overline{R} = \mathcal{R}_2$. 故ニ $\overline{\mathcal{R}_1} = \mathcal{R}_2$. 所が$\mathcal{R}'$ハ T($\mu$)-closed デアルカラ $\overline{\mathcal{R}_1} = \mathcal{R}_1$. ヨッテ $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ トナルカラ.

系2ノ簡単ナル Example

2次元ノ Euclid space ニ於テ $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ ナル閉正方形ヲトリ R トスル. $y > 0$ ナル R ノ点ノ近傍トシテハ, ソノ点ヲ中心トシテ x 軸ト交ハラナイ open sphere ヲトリ, x 軸上ニアル R ノ点ノ近傍トシテ, ソノ点ニテ x 軸ニ切シ $y \geqq 0$ ナル半平面上ニアル open sphere ニ其ノ点ヲ附加シタモノ (勿論イヅレモ R トノ Durchschnitt

ヲトル）ヲトル。

カヽルRガ regular topological space デアッテ而モ normal デナイコトハヨク知ラレテキル（cf. AH. $\S$31, $\S$60. 証明ハ功力，抽象空間論 PP. 86−7）. 更ニRガ completely regular デアルコトハ定理1カラ容易ニ知ラレル. 併シ normal デナイカラ勿論 bicompact デナイ. ヨッテ $\mathbb{T}(\eta)$−closed デナイ（定理3系）ソコデ上記系2ノ條件ヲ満足スル bicompact normal space $\mathcal{R}$ ノ一ツヲ構成シテミヨウ。

R外ノ一点ξヲトリ $\mathcal{R}=R+\xi$ トシ，Rノ各点ノ近傍ハ元ノ通リトシ，ξノ決定近傍系 $\{U(\xi)\}$ ヲ次ノヤウニトル. Rノx軸上ノ点ノ集合ヲFトシ，Fノ下ノ任意ノ有限集合ヲMトシ

$$(1)\qquad U(\xi)=\xi+\sum_{q\in F-M}U(q)$$

ヲ以テξノ近傍トスル・コノ$\mathcal{R}$ガ topological space ヲナスコトハ容易ニ分ル. 更ニ Hausdorff space デアルコトハ，Rノ二点 p, q ニツイテハ明カデアルカラ，Rノ一点pトξトニツイテ云ハウ. $p\in R-F$ ナルトキハRガ regular ダカラ $U(p)\cdot\sum_{q\in F}U(q)=0$ ナル $U(p), U(q)$ $(q\in F)$ ガ存在スル（FハRニテ closed ダカラ）ヨッテ(1)ニテ $M=0$ トスレバ $U(p)\cdot V(\xi)=0$. 又 $p\in F$ デアルトスレバ $F-p$ ハpト相素ナルRニ於ケル closed set ヲナスカラRノ regular ナルコトカラ $U(p)\sum_{q\in F-p}U(q)=0$

ナル $U(p)$, $U(q)$ ($q \in F-p$) ガアル. ヨッテ (1) ニテ $M-\{p\}$ トスレバ $U(p)U(\xi)=0$.

更ニ $\mathfrak{R}$ ハ bicompact デアル. $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ open covering $\{G_\alpha\}$ ($\alpha \in \mathfrak{M}$) ヲトル. $\xi \in G_{\alpha_0}$ ナル G_{α_0} ヲトレバ, アル $U(\xi) \subset G_{\alpha_0}$. コノ $U(\xi)$ ガ (1) デアルトスル. $M=\{p_1, \cdots\cdots, p_m\}$ トスレバ $p_i \in G_{\alpha_i}$ $i=1,\cdots\cdots,m$ ナル G_{α_i} ヲトル. サテ $\mathfrak{R}-(G_{\alpha_0}+G_{\alpha_1}+\cdots\cdots+G_{\alpha_m})$ ハ R ニ於ケル ($\xi+F$) ヲ含マザル closed set デアルカラ, R ノ topology ニヨリ, 実ハ Euclid space ノ有界閉集合ニ外ナラナイ (homeomorphic). ヨッテ bicompact デアルカラ $\{G_\alpha\}$ ノ有限個 $G_{\alpha_{m+1}}, \cdots\cdots, G_{\alpha_{m+n}}$ ニヨッテ cover サレル. 従ッテ $\mathfrak{R}$ ハ $G_{\alpha_0}, G_{\alpha_1}, \cdots\cdots, G_{\alpha_{m+1}}, \cdots\cdots, G_{\alpha_{m+n}}$ ナル有限個ノ G_α ニヨッテ cover サレル. 即チ $\mathfrak{R}$ ハ bicompact デアル. 明カニ R ハ $\mathfrak{R}$ ニテ dense デアリ, 定理3系ニヨリ $\mathfrak{R}$ ハ absolutely closed デアル. 即チコノ $\mathfrak{R}$ ハ定理4系2ノ $\mathfrak{R}$ ノ一ツデアル.

$\mathfrak{R}$ ハ bicompact Hausdorff space デアルカラ normal デアルガ, ソノ subspace R ハ normal デナイ. 故ニコノ $\mathfrak{R}$ ハ completely normal ナラザル bicompact normal ナ space ノ example ヲナシテヰル.

Tychonoff ハ completely regular space R ニ對シ, $\beta(R)$ ナル space ガ上記系2ノ條件ノ外ニ, R ニ於ケル任意ノ連續函數ガ変域ヲ $\beta(R)$ ニ連續的ニ拡大

出来ルヤウナ$\beta(R)$ノ存在ト共ガ essentially ニ unique ナルコトヲ証明シタ（Rノ上ノ連續函數ノナス空間ヲ用ヰテ、cf. Čech, On Bicompact space, Ann. of Math. 38, 1937）所デ上ニ作ッタ$\mathcal{R}$ハ$\beta(R)$ト homeomorphic デナイ．何トナレバRニ於ケル連續函數例ヘバ$f(p)=x$（但シxハRノ点pノx座標）ハ，ξニ於ケルfノ値ヲ如何ニ與ヘルモ，$\mathcal{R}=R+\xi$ニテ連續トハナリ得ナイカラデアル．此ノコトカラ系２ノ條件ノミデハ$\mathcal{R}$ガ essentially ニモ unique ニ決ラナイコトヲ示シテヰル。

§5. 再ビ regularity ニツイテ.

§1ニ於テ順序型μニヨッテ概念的ニ regularity ノ條件ヲ強メテ制限ヲナシ，其ノ上デ前§迄ノ性質ヲ調ベタ．併シ二ツノ相異ル順序型μ, νニツイテ$\mathfrak{T}(\mu)$ト$\mathfrak{T}(\nu)$トガ同値デアル場合ガ少クナイコトハ今迄デモ明カデアル。

先ヅ二ツノ順序型μ, νニツイテ，μナル順序型ヲモツ ordered set Iノ或ル subset I_1ガIト同ジ order ニツイテνナル順序型ヲモツトキ，$\nu \leqq \mu$ト書ク．（cf. Kamke, Mengenlehre, S. 69）之レハμ, νガ特ニ ordinal number ナルトキト調和スル．勿論一般ニハ二ツノμ, νノ間ニ$\leqq$ナル關係ガ必ズ成立スルコトハ限ラナイ。

然ルトキ定義1カラ明カニ，$\nu \leqq \mu$ ナラバ $\mathrm{T}(\mu)$-space ハ同時ニ $\mathrm{T}(\nu)$-space デアル。

例ヘバ $\mathrm{T}(\mu)$-space ハ必ズ $\mathrm{T}(0)$-space 即チ Hausdorff space デアリ，$\mathrm{T}(\omega)$-space ハ $\mathrm{T}(1)$-space (regular space) デアリ，$\mathrm{T}(\omega^*+\omega)$-space ハ $\mathrm{T}(\omega^*)$-space デアル．且ツ両者トモ逆ガ成立スルコトハ定義1ノ注意2ノ示ス所デアル。

"定理 H ニヨレバ μ ガ uniform 且 inversible ナ順序型デ且ツ $\mu \neq 0$ ナラバ $\mathrm{T}(\mu)$-space R ハ bicompact normal ナ space ニ embed スルコトガ出来ル．従ッテ R ハ completely regular space 即チ $\mathrm{T}(\eta)$-space デナケレバナラヌ．"

事實 $\eta \leqq \mu$ デアル．何トナレバ，モシ μ ナル順序型ヲモツ ordered set I ガ最後ノ要素ヲモツナラバ，ソノ要素ヨリ後ニアル要素ノ順序型ハ 0 デアッテ，μ ガ uniform ナルコトヨリ $\mu = 0$ トナリ，$\mu \neq 0$ ニ反スル．ヨッテ I ハ最後ノ要素ヲモタナイ．μ ハ inversible デアルカラ I ハ亦最初ノ要素ヲモ持タナイ。故ニ μ ノ cardinal number $|\mu| \geqq \aleph_0$．ソコデ $\iota_0 \in I$，$\kappa_0 \in I$，$\iota_0 < \kappa_0$ ナル任意ノ ι_0, κ_0 ヲトル．モシ $\iota_0 < \iota < \kappa_0$ ナル $\iota \in I$ ガ存在シナイトスル．然ラバ再ビ μ ノ uniform ナルコトヨリ $\iota_0 < \iota \in I$ ナル ι ノ集合 I_ι ハ μ ナル順序型ヲモツカラ最初ノ要素ヲ有シナイ．シカルニ明カニ I_ι ハ κ_0 ヲ最初ノ要素トスルカラ矛盾デアル．ヨッテ I ハ稠密

デアル。故ニ $\eta \leqq \mu$ デアル。

特ニ $|\mu| = \aleph_0$ トスレバ Cantor ノ定理ニヨリ $\mu = \eta$ デアル。換言スレバ

"凡テノ有理数ノナス（通常ノ order ニヨル）ordered set ノ順序型 η ハ次ノ三ツノ条件ニヨッテ characterize サレル：

1. uniform デアル。（定義3）
2. inversible デアル（即チ $\eta^* = \eta$）
3. $|\eta| = \aleph_0$。"

結局，§4マデノ結果ハ定理4系1ヲ除ク外ノ殆ンド凡テ completely regular space ニ関スル性質デアッタノデアル。唯，completely regular space R ニツイテ定理4，系2ノ如キコトガ成立スル條件ガ——系1ヲモ考ヘ併セテ——η ガ uniform 且 inversible ナルコトニアル様ニ思ハレル。