967. 函數方程式 $f(\alpha x+\beta y)+f(\gamma x+\delta y)=2f(x)f(y)$ ニ就イテ

春木　博（神戸高等商船）

函數方程式 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ ノ可測解ハ $f(x)\equiv 0$, $f(x)=\cos\lambda x$, $f(x)=\cosh\lambda x$（λ ハ任意ノ実數）デアル。

次ニ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ヲ $|\alpha|\leqq 1$, $|\beta|\leqq 1$, $|\gamma|\leqq 1$, $|\delta|\leqq 1$ ナル實數トシテ函數方程式

(1)　$f(\alpha x+\beta y)+f(\gamma x+\delta y)=2f(x)f(y)$

ノ連續解ヲ考究シヨウ。

(1) ニ於テ $x=0$, $y=0$ トオケバ $f(0)=0$ 或ハ $f(0)=1$ ヲ得ル。

$\boxed{\text{第一ノ場合}}$　$f(0)=0$ ナルトキ

(1) ニ於テ $y=0$ トオケバ

(2)　$f(\alpha x)+f(\gamma x)=0$

α, γ 何レモ 0 ナルトキハ (1) ニ於テ $x=0$ トオケバ

$$f(\beta y)+f(\delta y)=0$$

コンデ β, δ 何レモ 0 ナルトキハ，(1) ヨリ $f(x)\equiv 0$

故ニ、例ヘバ (2) ノ方程式ニ於テ α キ 0 ナリトシテ一般性ヲ失ハヌ。

(2) ニ於テ x ノ代リニ $\frac{x}{\alpha}$ トオキ、$C=\frac{\gamma}{\alpha}$ トスレバ

(3) $\quad f(x)=-f(cx)$

ヲ得ル。之ヨリ n ヲ任意ノ自然数トスルトキ

(4) $\quad f(x)=(-1)^n f(c^n x)$

$|c|<1$ ナラバ (4) ニ於テ $n\to\infty$ トスレバ $f(x)$ ガ連續ナル故 $f(c^n x)\to f(0)=0$

故ニ $f(x)\equiv 0$ ヲ得ル。

$|c|>1$ ナルトキハ (4) ニ於テ x ノ代リニ $\frac{x}{c^n}$ トオクコトニヨリ

$$f(x)=(-1)^n f\left(\frac{x}{c^n}\right)$$

$n\to\infty$ ナラシムレバ前ト同様ニシテ $f(x)\equiv 0$ ヲ得ル。

$C=1$ ナルトキハ (3) ヨリ $f(x)\equiv 0$ ヲ得ル。

$C=-1$ ナルトキハ $\alpha=-\gamma$ ニシテ (3) ヨリ

$$f(x)=-f(-x)$$

コノトキハ更ニ $f(\beta y)+f(\delta y)=0$ ニ於テ β, δ 何レモ 0 ナラバ (1) ヨリ $f(x)\equiv 0$ ヲ得ル。又 β, δ ノウチ何レカ 0 デナケレバ前述ト同様ニシテ $f(x)\equiv 0$ カ又ハ $\beta=-\delta$ ニシテ $f(x)=-f(-x)$ ヲ得ル。故ニ $\alpha=-\gamma$, $\beta=-\delta$, $f(x)=-f(-x)$ ノ時ノミヲ論ズルニ、コノト

キハ (1) ヨリ

$$f(\alpha x+\beta y)+f(-\alpha x-\beta y)=2f(x)f(y)$$

$f(x)=-f(-x)$ ナル故、左辺ハ 0 トナルカラ、$f(x)\equiv 0$ ヲ得ル。

結局、第一ノ場合カラハ $f(x)\equiv 0$ ノミヲ得ル。

第二ノ場合 $f(0)=1$ ナルトキ。

コノトキハ (1) ニ於テ $y=0$ トオクコトニヨリ

$$(5)\quad f(x)=\frac{1}{2}\{f(\alpha x)+f(\gamma x)\}$$

之レヨリ n ヲ任意ノ自然数トスルトキ

$$(6)\quad f(x)=\frac{1}{2^n}\Big\{f(\alpha^n x)+\binom{n}{1}f(\alpha^{n-1}\gamma x)+\binom{n}{2}f(\alpha^{n-2}\gamma^2 x)$$

$$+\cdots\cdots+\binom{n}{k}f(\alpha^{n-k}\gamma^k x)+\cdots\cdots+f(\gamma^n x)\Big\}$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(\alpha^{n-k}\gamma^k x)$$

ヲ得ル。

之ヲ数学的帰納法ニヨリテ証明スレニ、$n=1$ ノトキハ (5) ニヨリテ明カニ真デアル。

次ニ (6) が成リ立ツトイフ仮定ノ下ニ

$$(7)\quad f(x)=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f(\alpha^{n+1-k}\gamma^k x)$$

ヲ証明ショウ。

(5) ヨリ $\quad f(\alpha^{n-k}\gamma^k x)=\frac{1}{2}\{f(\alpha^{n-k+1}\gamma^k x)+f(\alpha^{n-k}\gamma^{k+1}x)\}$

$$(k=0,1,\cdots\cdots,n)$$

ヲ得ルカラ、之ヲ(6)ヘ代入スレバ

$$f(x)=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{f(\alpha^{n-k+1}\gamma^{k}x)+f(\alpha^{n-k}\gamma^{k+1}x)\right\}$$

右辺ノ括弧ヲホドイテ

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

ナル関係式ヲ用フレバ(7)ヲ得ル。

(6)ヲ用ヰテ $|\alpha|$, $|\gamma|$ ノウチ何レカ一方ノヨリ小ナラバ例ヘバ $|\alpha|<1$, $|\gamma|\leqq 1$ ナラバ $f(x)\equiv 1$ ナルコトヲ証明シヨウ。

(6)ニヨリ $f(x)-1=\dfrac{1}{2^n}\Big\{f(\alpha^n x)+\cdots\cdots+\binom{n}{k}f(\alpha^{n-k}\gamma^k x)$

$$+\cdots\cdots+\binom{n}{n}f(\gamma^n x)-2^n\Big\}$$

然ルニ $2^n=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots\cdots+\binom{n}{k}+\cdots\cdots+\binom{n}{n}$ ナル故

$$f(x)-1=\frac{1}{2^n}\Big[(f(\alpha^n x)-1)+\cdots\cdots+\binom{n}{k}(f(\alpha^{n-k}\gamma^k x)-1)$$

$$+\cdots\cdots+\binom{n}{n}(f(\gamma^n x)-1)\Big]$$

シカモ $|\alpha|<1$, $|\gamma|\leqq 1$, $f(0)=1$ ニシテ $f(x)$ ハ連續ナル故任意ノ正数 ε ニ對シ $n>n_0(\varepsilon)$ ナル n ニツキ

$$|f(\alpha^{n-k}\gamma^k x)-1|<\varepsilon$$

故ニ $|f(x)-1|<\dfrac{1}{2^n}\Big[1+\binom{n}{1}+\cdots\cdots+\binom{n}{n-n_0-1}\Big]\varepsilon$

$$+\frac{1}{2^n}\Big[\binom{n}{n-n_0}\Big|f(\alpha^{n_0}\gamma^{n-n_0}x)-1\Big|+\cdots\cdots+\binom{n}{n}\Big|f(\gamma^n x)-1\Big|\Big]$$

シカモ$|\alpha|<1$, $|\gamma|\leqq 1$ デ$f(x)$ハ連續ナル故、上式ノ右辺ノ二番目ノ括弧内ノ各絶對値ハ一定正數Mデオサヘラレル。

故ニ $\displaystyle |f(x)-1|<\varepsilon+\frac{M}{2^n}\left[\binom{n}{n-n_0}+\binom{n}{n-n_0+1}+\cdots\cdots+\binom{n}{n}\right]$

$n\to\infty$ ナラシムレバ $\displaystyle \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{n-n_0}+\cdots\cdots+\binom{n}{n}\right]\to 0$ ナル故

$$|f(x)-1|\leqq\varepsilon$$

εハ任意ニ小ナル故、之ヨリ$f(x)\equiv 1$ヲ得ル。

故ニ$|\alpha|=1$, $|\gamma|=1$ナル場合ヲ論ズレバヨイ。同樣ノ議論ニヨリ $f(x)=\frac{1}{2}[f(\beta x)+f(\delta x)]$ カラ $|\beta|=1$, $|\delta|=1$ナル場合ノミヲ論ズレバヨイコトガ判ル。

結局

(A) $\begin{cases}\alpha=1\\ \gamma=1\end{cases}$ (B) $\begin{cases}\alpha=1\\ \gamma=-1\end{cases}$ (C) $\begin{cases}\alpha=-1\\ \gamma=1\end{cases}$ (D) $\begin{cases}\alpha=-1\\ \gamma=-1\end{cases}$

(P) $\begin{cases}\beta=1\\ \delta=1\end{cases}$ (Q) $\begin{cases}\beta=1\\ \delta=-1\end{cases}$ (R) $\begin{cases}\beta=-1\\ \delta=1\end{cases}$ (S) $\begin{cases}\beta=-1\\ \delta=-1\end{cases}$

ニ於テ上段ノ一ツノ組ト下段ノ一ツノ組ヲ組合セタ十六場合ヲ論ズレバヨイ。

(A, P)ノトキ (1)ヨリ $f(x+y)=f(x)f(y)$

之ヨリλヲ任意ノ実數トスルトキ $f(x)=e^{\lambda x}$

(A, Q)ノトキ (1)ヨリ $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

之ヨリλヲ任意ノ実數トスルトキ $f(x)=\cos\lambda x$,

或ハ $f(x)=\cosh\lambda x$

(A, R)ノトキ (1)ヨリ $f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(y)$

之ハ(A, Q)ト一致スル。

(A, S) ノトキ (1) ヨリ　$f(x-y)=f(x)f(y)$

$y=x$ トオケバ　$f(0)=1$ ナル故　$f^2(x)=1$

$f(x)$ ハ連續デ $f(0)=1$ ナル故　$f(x)\equiv 1$

他ノ場合モ同様ニシテ論ジテ結局第一第二ノ場合ヲ總括スレバ

$$f(x)\equiv 0,\ f(x)=e^{\lambda x},\ f(x)=\cos\lambda x,$$

$$f(x)=\cosh\lambda x \qquad (\lambda\text{ ハ任意ノ實數})$$

ヲ得ル。

(註)　$f(x)\equiv 1$ ハ $\lambda=0$ トシタ特別ノ場合デアル。

（完）