

957 分布函数 / Graphical + 平均 = 就テ

梯 鉄 次 郎 (阪大)

二項級数 / 係数即チ $(\frac{1}{\xi} + \xi)^n$ / 係数 / 分布が
 $n \rightarrow \infty$ / トキ正規分布 = 従フトイフコトハヨク知レタ
 事デアル。一般←

$$\left(\frac{1}{\xi^r} + \frac{1}{\xi^{r-1}} + \dots + \frac{1}{\xi} + 1 + \xi + \dots + \xi^r \right)^n$$

1 係数 = 正規分布 = +ル。以下以上 / 事實ヲ含ム一般 + 事柄
 = 就テ述ベル。

先ヅ $M_r F(x)$ +ル平均 / operation ヲ定義スル。

即チ

$$M_r F(x) = \frac{1}{r} \left\{ F\left(x - \frac{r-1}{2}h\right) + F\left(x - \left(\frac{r-1}{2} - 1\right)h\right) \right. \\ \left. + \dots + F\left(x + \left(\frac{r-1}{2} - 1\right)h\right) + F\left(x + \frac{r-1}{2}h\right) \right\}$$

$$r = 2, 3, \dots, \quad rh < \infty$$

コゝ = $F(x)$ ハ +ル random variable / distribution function +ル。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = m,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) = d^2$$

$|m| < \infty, d^2 < \infty$ ヲ假定スル。

例へん

$$M_2 F(x) = \frac{1}{2} \left\{ F\left(x - \frac{h}{2}\right) + F\left(x + \frac{h}{2}\right) \right\}$$

$$M_3 F(x) = \frac{1}{3} \left\{ F(x-h) + F(x) + F(x+h) \right\}$$

又 $M_r^n F(x) = M_r(M_r^{n-1} F(x)) = \tau$ 定義スル。

以下簡単ノケレ M_r ヲ $M = \tau$ 記ス。

以上ノ定義ノモトニ次ノ事實ヲ簡單ニ計算サレ
ル。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(MF(x)) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x d(MF(x)) = m$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d(MF(x)) = d^2 + \sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{2r} \left\{ (r-1)^2 + (r-3)^2 + \dots + (r-2v-1)^2 \right\};$$

$$r - 2v - 1 \geq 0$$

又 $M^n F(x) = \tau^n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(M^n F(x)) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x d(M^n F(x)) = m$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d(M^n F(x)) = d^2 + n\sigma^2$$

即チ $M^n F(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ が distribution

function を作ルコトが分ツタ。

而ルトキ次ノ事ガ云ヘル。

定理 $F(x) = M$ を無限 = iterate スレバ
normal distribution = 収斂スル。

即チ

$$n \rightarrow \infty \quad M^n F(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0$$

コトニ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

証明 $F(x)$ は distribution function ナル
故、 \therefore characteristic function $f(t)$ ナル。
同様ニ $M^n F(x)$, characteristic function $f_n(t)$
 $f_n(t)$ = \therefore 表ハス。

即チ $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(M^n F(x))$$

トスレバ

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(MF(x)) \\ &= \frac{e^{it(\frac{r-1}{2})h} + \dots + e^{-it(\frac{r-1}{2})h}}{r} f(t) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{it(\frac{r-1}{2})h} + \dots + e^{it(\frac{r-1}{2})h}}{r} = g(t)$$

ヲ定義スレバ

$$f_n(t) = f(t) (g(t))^n$$

ナルコトハ容易ニ分ル。

$g(t) = g(t)$ ハ characteristic function

ノ條件ヲ満足シテキル。

實際之レヨリ distribution function $G(x)$

ヲ求メレバ

$$G(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq x < -\frac{(r-1)}{2}h \\ \frac{1}{r} & -\frac{(r-1)}{2}h \leq x < -\left(\frac{r-1}{2}-1\right)h \\ \frac{2}{r} & -\left(\frac{r-1}{2}-1\right)h \leq x < -\left(\frac{r-1}{2}-2\right)h \\ \vdots & \\ 1 & \left(\frac{r-1}{2}\right)h \leq x \leq \infty \end{cases}$$

以上ニヨリ

$$M^n F(x) = F(x) * (G(x))^{n*}$$

ナルコトハ分リヌ。

又 $m < \infty$, $d < \infty$ ナルヲ以テ

central limit theorem ヲ用フレバ

$n \rightarrow \infty$ ナルトキ

$$M^n F(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0$$

ナルコトが証明サレタ。

[註] $F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq \infty \end{cases}$ トレバ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq \infty \end{cases} \quad \text{ヲトレバ}$$

始メ = 述ベク多項式, 係數, 分布 = ナル。

$M + \nu$ operation ヲ積分 = ヨル平均, operation

即チ

$$M_{\xi} F(x) = \frac{1}{2\xi} \int_{x-\xi}^{x+\xi} F(u) du$$

= τ define スレバ同様ノコトガ云ヘル。

定理 $n \rightarrow \infty$ トスレバ

$$M_{\xi}^n F(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0$$

証明 $M_{\xi} F(x)$ が連続 + distribution function ヲ作ルコトハ明白ヲナル。

同様 = $M_{\xi}^n F(x)$ も亦連続 + distribution function ヲ作ル。

故 = $F(x)$, characteristic function $\gamma f(t)$

$M_{\xi}^n F(x)$, characteristic function $\gamma f_n(t)$

= τ 表ハセバ

計算 = ヨツテ

$$f_1(t) = \frac{e^{it\xi} - e^{-it\xi}}{2it\xi} \quad f(t) = \frac{\sin t\xi}{t\xi} f(t)$$

ナルコトが証明サレタ。

[註] $F(x) = F(x)$ トシテ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq \infty \end{cases} \quad \text{ヲトレバ}$$

始メ = 述ベク多項式, 係數, 分布 = ナル。

$M + \nu$ operation ヲ積分 = コル平均, operation

即チ

$$M_{\xi} F(x) = \frac{1}{2\xi} \int_{x-\xi}^{x+\xi} F(u) du$$

= テ define スレバ同様ノコトが云ヘル。

定理 $n \rightarrow \infty$ トスレバ

$$M_{\xi}^n F(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0$$

証明 $M_{\xi} F(x)$ が連続 + distribution function ヲ作ルコトハ明カデアナル。

同様 = $M_{\xi}^n F(x)$ モ亦連続 + distribution function ヲ作ル。

故 = $F(x)$, characteristic function $\gamma f(t)$

$M_{\xi}^n F(x)$, characteristic function $\gamma f_n(t)$

= テ表ハセバ

計算 = ヲツテ

$$f_1(t) = \frac{e^{it\xi} - e^{-it\xi}}{2it\xi} \quad f(t) = \frac{\sin t\xi}{t\xi} f(t)$$

$$\frac{\sin t\xi}{t\xi} = g(t) \text{ と def. スレバ}$$

一般 = $f_n(t) = f(t) (g(t))^n$ + ルコトが云へル。

茲 = $g(t)$ の characteristic function 1 條件ヲ満足スル。

コレヲ distribution function $G(x)$ ヲ求メレバ

$$G(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq -\xi \\ \frac{x}{2\xi} + \frac{1}{2} & : -\xi \leq x \leq \xi \\ 1 & : \xi \leq x \end{cases}$$

が得ラレル。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dG(x) = 0$$

$$\sigma'^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dG(x) = \frac{1}{2\xi} \int_{-\xi}^{+\xi} x^2 dx = \frac{\xi^2}{3}$$

$$\text{故} = M_{\xi}^n F(x) = F(x) * (G(x))^{n*}$$

central limit theorem = \exists 1)

$n \rightarrow \infty$ + レバ

$$M_{\xi}^n F(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma'\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0$$

+ ルコトが証明サレル。