950. Connected Vector-lattice

中野 秀五郎（東大）

此レハ Vector-lattice ニ關スル一ツノ Remark デアル。

I. Vector-lattice $\mathfrak{M}$ トハ G. Birkhoff ノ意味トスル。即チ実数ニ関スル modul ニシテ

1) $a > b$ & $b > c \longrightarrow a > c$

2) $a \not> a$

3) $a \cup b$, $a \cap b$ ガ存在ス

4) $a > b \longrightarrow a+c > b+c$

5) $a > 0,\ \alpha > 0 \longrightarrow \alpha a > 0$

然ルトキハ例ニヨリ

$$a_+ = a \smile 0\ ,\quad a_+ = (-a)_+,\quad |a| = a_+ + a_-$$

ガ定義セラレ

$$|a| \frown |b| = 0$$

ナルトキ a ト b トハ orthogonal ナリト云フ。

$\mathfrak{M}$ ノ中ノ二ツノ submodul M, N ニ對シ，M ト N トノ element ハ互ニ orthogonal，然カモ，$\mathfrak{M}$ ノ element x ガ

$$x = h + k,\quad h \in M,\quad k \in N$$

ナル如クニ表ハシ得ルトキ，$\mathfrak{M}$ ヲ M ト N トノ direct sum ト呼ブコトヽスル。又 $\mathfrak{M} = M + N$ ト記スコトヽスル。

$\mathfrak{M} = M + N$ ナルトキハ M ハ M ニ orthogonal ナ element ノスベテニ orthogonal ナ element ノ總デヨリナルコトハ明カナリ。コノ如キ submodul M ヲ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul ト呼ブコトヽスル。（此ノ normal ハ G. Birkhoff ノトハ少シ異ル。Bochner, Phylips ノ用ヒタル意味ナリ。）$\mathfrak{M}$ ノ normal submodul ガ又 vector-lattice ナルコトモ明カナリ。

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathfrak{M}$ ガ二ツノ submodul ノ和トシテ表ハシ得ザルトキ $\mathfrak{M}$ ヲ connected ナリト云フ。

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathfrak{M}$ ノ如何ナル normal submodul モ

connected デナイトキ, $\mathfrak{M}$ ハ discontinuous ト云フ。

定理 1 $\mathfrak{M}$ ガ connected normal submodul $\mathfrak{N}$ ヲ含メバ, $\mathfrak{N}$ ヲ含ム最大ノ connected normal submodul ガ存在ス。此レヲ $\mathfrak{M}$ ノ component ト云フコトニスル。

証明 $\mathfrak{N}$ ヲ含ム connected normal submodul ノ總テヲ含ム normal submodul ノ Durchschnitt ヲ $\mathfrak{N}'$ トスレバ, $\mathfrak{N}'$ ハ又 normal submodul ナリ。然カモ $\mathfrak{N}'$ ハ connected デアル。

若シ $\mathfrak{N}' = \mathfrak{G} + \mathfrak{K}$ ナリトスレバ, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}\mathfrak{G} + \mathfrak{N}\mathfrak{K}$ ナルニヨリ, $\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ カ $\mathfrak{K}$ ノ何レカニ含マレル。$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}$ トスレバ、$\mathfrak{N}$ ヲ含ム connected normal submodul ハ $\mathfrak{N}'$ ニ含マレルニヨリ、$\mathfrak{G}$ ニ含マレネバナラヌ。故ニ $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{G}$ トナル。此ノ $\mathfrak{N}'$ ガ $\mathfrak{N}$ ヲ含ム最大ノ connected normal submodul ナルコトハ明カナリ。

定義 $\mathfrak{M}$ ノ element ノ集合 $\mathfrak{G}$ ニ對シ $\mathfrak{G}$ ヲ含ム最小ノ normal submodul (此レノ存在ハ明カ) ヲ $\{\mathfrak{G}\}$ ニテ表ハスコトニスル。

定理 2 $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{N}_\nu$ ガ $\mathfrak{M}$ ノ有限個ノ component ナルトキハ

$$\{\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{N}_\nu\} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{N}_\nu$$

ナリ。

[証明] $\{\mathfrak{N}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{N}_\nu\}$ ハ connected ナラザルニヨリ

$$\{\mathfrak{N}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{N}_\nu\} = \mathfrak{G} + \mathfrak{K}$$

トナル。

然ルトキハ

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1\mathfrak{G} + \mathfrak{N}_1\mathfrak{K}$$

$\mathfrak{N}_1$ ハ connected ナルニヨリ，$\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{G}$ カ或ハ $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{K}$ トナル。同様ノ理ニヨリ $\mathfrak{N}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{N}_\nu$ ハ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{K}$ ニヨリ二組ニ分レル。又総テガ一方 $\mathfrak{G}$ ニ属セバ $\{\mathfrak{N}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{N}_\nu\} \subset \mathfrak{G}$ トナリテ矛盾ス。此ノ如ク又 $\mathfrak{G}$ 及ビ $\mathfrak{K}$ ヲ分ケレバ結局

$$\{\mathfrak{N}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{N}_\nu\} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{N}_\nu$$

ヲ得ル。

此ノ定理ニヨリ component ハ互ニ orthogonal デアル。又 $\mathfrak{M}$ ノスベテノ component ニ orthogonal ナ element ノ全体ヲ $\mathfrak{K}$ トスレバ $\mathfrak{K}$ ハ明カニ normal submodul ニシテ、然カモ discontinuous デアル。故ニ次ノ定理ガ得ラレル。

[定理3] $\mathfrak{M}$ ハ総テノ components $\mathfrak{N}_\alpha$ 及ビ $\mathfrak{N}_\alpha$ ノ総テニ orthogonal ナ discontinuous normal submodul $\mathfrak{K}$ ニ対シ

$$\mathfrak{M} = \{\mathfrak{N}_\alpha, \mathfrak{K}\}$$

デアル。

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathfrak{M} = \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}$ ナルトキハ $\mathfrak{Y}$ ハ明カニ normal submodul デアル。此ノ如キ normal submodul ヲ complemented ト云フコトニスル。

$\mathfrak{M}$ ノ component ハ必ズシモ complemented ナラズ。

例. (x, y) (x, y 實數) ヲ辞書式ニ大小ヲツケル。$\mathfrak{M}$ ノ element ヲ

$$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots\right)$$

ニシテ、$x_i = 0$ ナルトキハ y_i ハ任意. $x_1 \neq 0$ ナル時ハ x_i ノ有限個ヲ除イテ $x_i = x_1$ トスレバ

$$\left((0, y_1), (0, 0), (0, 0), \cdots\cdots\right)$$

ノ全体 A_1 ハ component デアルガ complemented デハナイ。

然シ $\mathfrak{M}$ ガ Archimedean

6) $a > 0$ ナレバ, 如何ナル b ニ對シテモ、充分大ナル n ニ對シ、$na \nleq b$ デアル。

ヲ満足スルトキハ component ハ complemented デアルコトヲ III ニテ証明スル。

$\boxed{\text{注意}}$ 以上 $\mathfrak{M}$ ヲ実數ニ関スル modul トセシモ、單ニ 1), 2), 3) ヲ満足スル modul ナレバ以上ノコトハ皆成立スル。

II. 此処デハ bicompact Hausdorff space B ノ上デ continuous ナ functions ノ Vector-lattice $\mathfrak{M}$ ヲ考ヘル。

$\mathfrak{M}$ ヲ B ニテ continuous ナ functions ノ vector-lattice ニシテ，然カモ

1) $\mathfrak{M} \ni 1$

2) $a, b \in B$ ニ對シ，$f(a) \neq f(b)$ ナル $f(x)$ が $\mathfrak{M}$ ノ中ニ存在スル。

ナル條件ヲ満足スルモノトス。

$\boxed{\text{定理 4}}$ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul $\mathfrak{N}$ ハ B ノ或ル closed set N ニテ 0 ニナル $\mathfrak{M}$ ノ functions 全体ヨリナルコトト同一デアル。

$\boxed{\text{証 明}}$ $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul トス。今 $\mathfrak{N} \ni f(x)$ ナル總テノ $f(x)$ ニ對シ $E(x : f(x) = 0)$ ナル点集合 N ハ明カニ closed ナリ。又 $|f(x)| \frown |g(x)| = 0$ ナル $g(x)$ 即チ $\mathfrak{N}$ ニ orthogonal ナ $g(x)$ ハ B − N ニテ $g(x) = 0$ トナル。故ニ N ニテ $h(x) = 0$ ナル $h(x)$ ハ此ノ如キ $g(x)$ ノ總テニ orthogonal トナル。故ニ $h(x) \in \mathfrak{N}$ ナリ。

逆ニ又 closed set N ニテ 0 ニナル $\mathfrak{M}$ ノ function ノ全体ハ normal submodul ヲナス。如何トナレバ $a \in B - N$，$y \in N$ ナル a, y ニ對シ 1), 2) ヨリ $f(a) = 1$，$f(y) = -1$ ナル $f(x)$ が $\mathfrak{M}$ ニ存在ス。然ルトキハ $f(y) < 0$ ナル y ノ集合ハ open set ニシテ，N ハ Bicompact ナルニヨリ此ノ如キ open set ノ有限個ニテ cover サレル。此有限個ニ對スル functions ヲ

$f_1(x), \ldots\ldots, f_n(x)$ トスレバ

$$f_0(x) = (f_1(x) \wedge f_2(x) \wedge \cdots\cdots \wedge f_n(x)) \vee 0$$

ト置ケバ

$$f_0(a) = 1, \quad f_0(x) = 0 \quad in \ B$$

トナル。故ニNニテ0トナルスベテノ函数ハnormal submodulヲナスコトガ容易ニワカル。

$\boxed{\text{定理5}}$ $\mathfrak{M}$ノnormal submodul $\mathfrak{N}$ガcomplementedデアルタメノ必要且ツ充分ナル条件ハ前ノ定理ノclosed set Nガopenナルコトデアル。

$\boxed{\text{証明}}$ $\mathfrak{N}$ガcomplementedナレバ、$\mathfrak{M} = \mathfrak{N} + \mathfrak{K}$トナリ、$\mathfrak{K}$ノスベテノfunctionsヲ0トスル点集合ハB－Nニシテclosedナリ。故ニNハopenトナル。逆ニNガopenトスル。然ルトキハB－Nガclosedナルニヨリ前定理ノ証明中ヨリ$N \ni a$ナルaニ対シ

$$f(a) = 1, \quad f(x) = 0 \quad in \ B-N$$

ナル$f(x)$ガ$\mathfrak{M}$ニ存在スル。今$\varphi(x)$ヲ$\mathfrak{M}$ノ任意ノfunctionsトスル。シカルトキハ又$0 \doteqdot \varphi(x) \in \mathfrak{M}$トナル。

$$g(x) = \varphi(x) - (|\varphi(a)| + 1) f(x)$$

ト置ケバ　$g(x) \in \mathfrak{M}$ニシテ

$$g(x) = \varphi(x) \quad in \ B-N$$

$$g(a) = -1$$

トナル。故ニ $g(x)<0$ ナル x ノ全体ハ a ノ近傍ニシテ N ハコノ如キ近傍ノ有限個デ cover サレル。此ノ如キ有限個ニ對スル functions ヲ $g_1(x), \cdots\cdots, g_n(x)$ トスレバ

$$f_0(x) = \{g_1(x) \frown g_2(x) \frown \cdots\cdots \frown g_n(x)\} \smile 0$$

ハ、$f_0(x) \in \mathfrak{M}$ ニシテ

$$f_0(x) = \varphi(x) \text{ in } B-N, \quad f_0(x)=0 \text{ in } N$$

トナル。故ニ $f_0(x) \in \mathfrak{M}$ ニシテ $\varphi(x) - f_0(x)$ ハ $\mathfrak{N}$ ニ orthogonal ナリ。又 $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$ ガ任意ナルトキハ positive part ト negative part ニ分ケテ考ヘレバ充分デアル。定理5ヨリ直チニ次ノ定理ガ得ラレル。

$\boxed{\text{定理6}}$ $\mathfrak{M}$ ガ connected ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ B ガ connected ナルコトナリ。又 $\mathfrak{M}$ ガ discontinuous ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ B ガ discontinuous ナルコトナリ。

$\boxed{\text{定理7}}$ $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul トスル。$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$ ナル normal submodul $\mathfrak{N}'$ ガ常ニ

$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{G} + \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{K} \neq 0$$

ナル如クニ表ハサレルトキハ $\mathfrak{N}$ ハ complemented デアル。

$\boxed{\text{証　明}}$ 此レハ transfinite induction デ証明スル。先ヅ

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{K}_1, \quad \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{K}_1 \neq 0$$

デアル。$\mathfrak{G}_1$ ハ或ル closed set N_1 ニテ0トナルスベテノ $\mathfrak{M}$ ノ functions ヨリナル。又 $\mathfrak{G}_1$ ハ complemented ナルニヨリ N_1 ハ open デアル。次ニ

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{K}_2, \quad \mathfrak{G}_2 \supset \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{K}_2 \neq 0$$

シカルトキハ $\mathfrak{G}_2$ ハ closed set N_2 ニテ0トナル総テノ $\mathfrak{M}$ ノ functions ヨリナル。又 $\mathfrak{G}_2$ ハ complemented ナルニヨリ N_2 ハ open ナリ。以下同様ニシテ

$$\mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}_{n+1} + \mathfrak{K}_{n+1}, \quad \mathfrak{G}_{n+1} \supset \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{K}_{n+1} \neq 0$$

トスル。然ルトキハ $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \cdots\cdots \supset \mathfrak{N}$ ニシテ $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \cdots\cdots$ ハ $\sum N_n$ ニテ0トナル $\mathfrak{M}$ ノスベテノ function ヨリナル。又 $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \cdots\cdots$ ガ normal submodul ナルニヨリ，$\sum N_n$ ハ open closed デアル。故ニ $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \cdots\cdots$ ハ complemented デアル。以下同様ニシテ遂ニ $\mathfrak{N}$ ニ至ル。

III. $\mathfrak{M}$ ハ前ニモドッテ Archimedean ヲ満足スル vector-lattice トスル。

定理8 $\mathfrak{M}$ ノ component ハ complemented デアル。

証明 $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ component トスル。任意ノ $\mathfrak{M}$ ノ element $a > 0$ ニ対シテ $\mathfrak{N} \ni b$, $a-b$ ガ $\mathfrak{N}$ ニ orthogonal ナ如キ b ガ存在スルコトヲ証明スレバ充分デアル。

今 a ニ関シテ bounded ナ element ノ全体

即チ

$$|x| \leqq \alpha a$$

ナル實數αノ存在スルxノ全体ヲ$\mathfrak{L}$トスレバ、$\mathfrak{L}$ハ vector-lattice ニシテ G. Birkhoff ノ意味デノ normal デアル。

然ルトキハ$\{a\}$内ノ normal submodul $\mathfrak{N}'$ニ對シテハ$\mathfrak{N}'\mathfrak{L}$ハ$\mathfrak{L}$内ノ normal submodul トナル。(如何トナレバ$|x| \frown |y| = 0$ト$|x| \frown a \frown |y| = 0$トハ$\{a\}$内デハ同一デアル。) 然カモ$\mathfrak{N}' \neq 0$ナラバ$\mathfrak{N}'\mathfrak{L} \neq 0$デアル。又$\mathfrak{M}$ノ normal submodul $\mathfrak{N}$ノ normal submodul ヲハ又$\mathfrak{M}$ノ normal submodul ナルコトモ明カナリ。

$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}\{a\}, \quad \mathfrak{N}'' = \mathfrak{N}'\mathfrak{L}$$

トスレバ、$\mathfrak{N}''$ハ$\mathfrak{L}$ノ normal submodul ナリ。

$\mathfrak{N}'' \subset \overline{\mathfrak{N}} \subset \mathfrak{L}$ナル任意ノ submodul $\overline{\mathfrak{N}}$ニ對シ、$\mathfrak{N}$ハ component ナルニヨリ

$$\{\mathfrak{N}, \overline{\mathfrak{N}}\} = \mathfrak{G} + \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{K} \neq 0$$

故ニ

$$\{\overline{\mathfrak{N}}\} = \{\overline{\mathfrak{N}}\}\mathfrak{G} + \{\overline{\mathfrak{N}}\}\mathfrak{K} \qquad \{\overline{\mathfrak{N}}\}\mathfrak{K} \neq 0$$

從ツテ

$$\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{L}\{\overline{\mathfrak{N}}\} = \mathfrak{L}\{\overline{\mathfrak{N}}\}\mathfrak{G} + \mathfrak{L}\{\overline{\mathfrak{N}}\}\mathfrak{K}$$

$$\mathfrak{N}'' \subset \mathfrak{L}\{\overline{\mathfrak{N}}\}\mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{L}\{\overline{\mathfrak{N}}\}\mathfrak{K} \neq 0$$

然ルニ$\mathfrak{L}$ハ角谷—Krain—Stone—吉田ノ定理ニヨリ、Bicompact Hausdorff space ノ continicous function ノ vector-lattice ニテ表現サレ、コノ vector-lattice ハIIノ $\mathfrak{M}$ ノ性質 1), 2) ヲ有ス．故ニ前定理7ニヨリ $\mathfrak{M}''$ ハ $\mathfrak{L}$ 内ニテ complemented デアル。即チ

$$a = b + c, \quad b \in \mathfrak{M}'', \quad \mathfrak{M}'' \perp c$$

トナル。故ニ $\mathfrak{M}'' \perp c$ ヨリ $\mathfrak{M}' \perp c$ ヲ得ル、従ツテ $\mathfrak{M} \perp c$ トナル。