948. 能代氏ノ豫想ニツイテ

有 馬　喜 八 郎（阪大）

以下ノ事ニツイテハ能代氏著"最近ノ函数論"第二節有理型函数ノ逆函数ヲ参照シテ下サイ。

(I) 同書 P.36 ニ有理型函数ニ関スル Gross ノ Sterm 定理ガ述ベテアリマス。

$w=f(z)$ ヲ $|z|<\infty$ ニ於テ有理型，$z=\infty$ ヲ眞性特異点トシソノ逆函数ヲ $z=\varphi(w)$ トシマス。

$z=\varphi(w)$ ノ一ツノ正則ナ要素 $\mathfrak{e}_{z_0}=P(w, w_0)$ ヲ中心 w_0 ヲ出ル各半直線 $\arg(w-w_0)=\theta$ ニ沿ッテ Weierstraß ノ意味ノ解析接續ガ可能ナル限リ之レヲツヅケル時二ツノ場合ガ區別サレマス。

(1)　$W=\infty$ ノ直前迄解析接續ガ出来ル場合

(2)　有限ノ点デ特異点ニ出會フ場合

(2) ノ場合ヲ同書ニ從ヒ便宜上 singular ray ト云フコトニシマス。

w_0 ヨリ各 singular ray ニツイテ w_0 カラ最初ノ特異点ト $W=\infty$ トヲ結ブ線分ヲ w 平面カラ取リ除ケバ，星状領域 D ガ得ラレマス。D ニ於テ $\mathfrak{e}_{z_0}$ ハ $z=\varphi(w)$ ノ一價正則且ツ單葉ナ分岐ヲ定義シマス、コノ分岐自身ヲモ $z=\varphi(w)$ デ表ハシマスト次ノ Gross ノ定理ガ成立シマス。

Gross ノ定理

singular ray: $\arg(w-w_0)=\theta$ ノ偏角θノ集合ハLebesgue ノ意味デ測度0ナリ。

コノ時w_0カラ最初ノ特異点ガ代数特異点ガ代数特異点デアル半直線ノ個数ハ高々可附番無限デ，w_0カラ最初ノ特異点ガ超越特異点デアルヤウナ半直線デハwガソノ特異点ニ半直線上ニ沿フテ近ヅクトキ$\varphi(w)\to\infty$ニナリマス。

上ノ事ト同書ニノッテヰル種々ノ定理ヨリ次ノ如キ能代氏ノ豫想ガ提出サレル訳デス。

(II) 能代氏ノ豫想（同氏著p.46参照）

或ルz_0ヲ中心トスル星状領域Δニ於テ$w=f(z)$ヲ正則単葉トシタトキ若シz_0ヲ出ル半直線ニ沿ウテΔノ境界点z'ニ近ヅクトキ恒ニ$f(z)$ガ漸近値ヲ持ツトスレバw平面上ノ絶対調和測度0ノ集合Eニ含マレル漸近値ヲ與ヘル方向$\arg(z'-z_0)=\theta$ノ集合ハLebesgue測度0デアル。

〔注意〕

前後致シマスガGrossノ定理ハ$\varphi(w)$ガ單葉且ツsingular rayニ沿フテ特異点ニ近ヅクトキ$\varphi(w)\to\infty$ナルコトノミヲ利用シテ証明出来マス、詳細ナ証明ハ能代氏ノ著書又ハNevanlinna著Eindeutige Analytische Funktionen (1936) ヲ参照シテ下サイ。

(III) Avhandlinger Det Norske Videnskaps-Akademie (1937) ニ於テSelberg

ハ次ノ定理ヲ述ベテ居マス。

Selberg ノ定理

　Bヲ $z=\infty$ ヲ含ム z 平面ノ領域トシソノ Rand ヲ Γ トス。Kapazität $C(\Gamma)=0$ ナラバ $z \neq \infty$ ナル B ノ点ニテハ調和デ $z=\infty$ ノ近傍ニテハ

$$\log|z| + w(z)$$

但シ $w(z)$ ハ $z=\infty$ デ調和函数トナリ、更ニ z ガ Γ ニ近ヅクトキハ $-\infty$ ニ一様ニ収斂スル調和函数 $u(z, B)$ ガ存在ス。

　コノ Selberg ノ函数ヲ用ヒテ能代氏ノ豫想ヲ証明致シマス。

　(IV) (II) ノ豫想ニテ B ヲ E ト考ヘ且ツ E ハ w 平面上ニアリト考ヘテ Selberg ノ函数 $u(w, E)$ ヲ作リマス。

　$u(w, E)$ ノ共軛調和函数ヲ $v(w, E)$ トシ

$$\Phi(w, E) = u(w, E) + i\,v(w, E)$$

ヲ考ヘマストコレハ多價函数デス。

　$f(z)$ ハソノ単葉性ニヨリ Δ 内ニテ E 上ノ値ヲトリマセン。

　故ニ Monodromy Satz ニヨリ $\Phi(w, E)$ ノ分岐ヲ定メルト $\Phi[f(z), E]$ ハ Δ 内ニテ一價正則函数トナリマス。

　然カモ $u(w, E)$ ヲ作ル方法ヲ吟味シテミマスト $\Phi(f(z), E)$ ノ単葉性ガ成立シマス。コレニツイテハ

Selberg ノ論文ヲ研究シテ下サイ。

且ツ上ノ $U(z, B)$ ノ性質ニヨリ 亜[$f(z)$, E] ハ問題ノ方向ニ對シ 亜[$f(z)$, E] $\rightarrow \infty$ ガ成立シマス。

従ツテ (II) ノ注意ニヨリ Gross ノ定理ノ証明ヲソノママ 亜[$f(z)$, E] ニ應用致シ，豫想定理ガ証明デキマス。尚ホ念ノタメ Capacity 0 ノ集合ハ絶対調和測度 0 デアルコトヲ注意シテオキマス。

(V) 以下簡単ニ得ラレル系ヲ述ベマス。

Nevanlinna ノ最大値原理（Nevanlinna 著書 p. 134）ト Lindelöf ノ最大値原理ヲ同時ニ含ム次ノ定理ガ得ラレマス。

系1. $w=f(z)$ ヲ任意ノ Jordan 領域 D ニ於テ一價正則且ツ境界 C 上ノ絶対調和測度 0 ナル集合 E ヲ除キ他ノ境界点 z' ニ於テ $\overline{\lim}\,|f(z)| \leq 1$ トスレバ D ニテ到ル所 $|f(z)| \leq 1$ デアルカ，又ハ D ハ ∞ ヲ漸近値トスル $w=f(z)$ ノ漸近道ヲ含ム。

(注意) 証明ハ能代氏著書 P. 45 ヲ参照サレタシ、定理ノ E ハ絶対調和測度 0 ナル集合ノ高々可附番個ノ和集合トシテモ成立スルコトハ明カデス。

系2. $f(z)$ ハ全平面ニテ絶對調和測度 0 ナル集合 E ヲ眞性特異点トスル有理型函数トス．モシ $f(z)$ ガ a ヲ有限回以上トラナケレバ領域ハ a ヲ漸近値トスル漸近道ヲ含ム。

上ノ系ニテ絶対調和測度 0 ナル眞性特異点ヲ有スル

$f(z)$ ハ眞性特異点ノ近傍ニテ如何程デモ大ナル値ヲトルコトニ注意シマスト次ノ定理ガ成立シマス。

系3. 能代氏ノ定理

$f(z)$ ハ單一連結ノ區分 D ニテ絶對調和測度 0 ノ眞性特異点ノ集合ヲ除キ有理型トス。

モシ眞性特異点 $z=Z$ ノ近クニテ $f(z) \neq a$ ナラバスベテノ $\delta > 0$ ニ對シ z ガ連續曲線ニ沿フテ $|z-Z| < \delta$ ノ特異点ニ近ヅクトキ $f(z) \longrightarrow a$ ガ成立ス。

系2, 系3ハ $\dfrac{1}{f(z)-a}$ ノ逆函數ヲリーマン面上デ考ヘレバ容易シイワケデス。