947. 代数方程式ノ根ノ限界ニ就イテ

春木　博（神戸商船）

以下　係数ニ條件ヲ與ヘストキノ n 次ノ代数方程式ノ根ノ限界ニツイテ考察シヨウ。断リノナイカギリハ，係数ハ複素数トスル。

（定理）　n 次ノ代数方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$$

ニ於テ $|a_0|>\dfrac{n-1}{2}$ ナラバ任意ノ根ヲ α トスルトキ

$$|\alpha|\leqq\left(\frac{|a_1|^n+2|a_2|^{\frac{n}{2}}+3|a_3|^{\frac{n}{3}}+\cdots\cdots+n|a_n|^{\frac{n}{n}}}{n\left(|a_0|-\frac{n-1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

（証明）　$|x|=\rho$ トオケバ

$$|f(x)|\geqq|a_0|\rho^n-\left(|a_1|\rho^{n-1}+|a_2|\rho^{n-2}+|a_3|\rho^{n-3}+\cdots+|a_n|\right)$$

シカルニ $a\geqq0,\ b\geqq0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1$ ナラバ

$$a^{\alpha}b^{\beta}\leqq a\alpha+b\beta$$ ナル故

$$|a_1|\rho^{n-1}=\left(|a_1|^n\right)^{\frac{1}{n}}\left(\rho^n\right)^{1-\frac{1}{n}}\leqq\frac{1}{n}|a_1|^n+\left(1-\frac{1}{n}\right)\rho^n$$

$$|a_2|\rho^{n-2}=\left(|a_2|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}\left(\rho^n\right)^{1-\frac{2}{n}}\leqq\frac{2}{n}|a_2|^{\frac{n}{2}}+\left(1-\frac{2}{n}\right)\rho^n$$

$$|a_3|\rho^{n-3}=\left(|a_3|^{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{3}{n}}\left(\rho^n\right)^{1-\frac{3}{n}}\leqq\frac{3}{n}|a_3|^{\frac{n}{3}}+\left(1-\frac{3}{n}\right)\rho^n$$

\- - - - - - - - - - - - - - - -

$$|a_n|\leqq\frac{n}{n}|a_n|^{\frac{n}{n}}+\left(1-\frac{n}{n}\right)\rho^n$$

ナル故

$$|f(x)| \geqq |a_0|\rho^n - \frac{|a_1|^n + 2|a_2|^{\frac{n}{2}} + 3|a_3|^{\frac{n}{3}} + \cdots\cdots + n|a_n|^{\frac{n}{n}}}{n}$$

$$-\frac{n-1}{2}\rho^n$$

故ニ $|a_0| > \frac{n-1}{2}$ ナル故

$$\rho^n > \frac{|a_1|^n + 2|a_2|^{\frac{n}{2}} + 3|a_3|^{\frac{n}{3}} + \cdots\cdots + n|a_n|^{\frac{n}{n}}}{n\left(|a_0| - \frac{n-1}{2}\right)}$$

ナラバ

$$|f(x)| > 0$$

故ニ、任意ノ根ヲ α トスルトキ

$$|\alpha| \leqq \left[\frac{|a_1|^n + 2|a_2|^{\frac{n}{2}} + 3|a_3|^{\frac{n}{3}} + \cdots\cdots + n|a_n|^{\frac{n}{n}}}{n\left(|a_0| - \frac{n-1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{n}}$$

（定理） n 次ノ代数方程式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots\cdots + a_n = 0$$

ニ於テ $|a_0| \geqq \frac{n + \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2}{2}$ ナラバ任意ノ根ヲ α トス

ルトキ

$$|\alpha| \leqq 1 \text{ カ 或ハ } |\alpha| > \left[\frac{|a_0| + \sqrt{|a_0|^2 - n\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2}}{n}\right]^{\frac{1}{n}} (\geqq 1)$$

デアル。

（証明） $|x| = \rho$ トスレバ

$$|f(x)| \geqq |a_0|\rho^n - \left(|a_1|\rho^{n-1} + |a_2|\rho^{n-2} + |a_3|\rho^{n-3} + \cdots\cdots + |a_n|\right)$$

然ルニ $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ ナルトキ $xy \leqq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ナル故

$$|a_1|\rho^{n-1} \leqq \frac{1}{2}(|a_1|^2+\rho^{2n-2})$$

等ヲ得ル。

故ニ $$|f(x)| \geqq |a_0|\rho^n - \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2+\rho^{2n-2}+\rho^{2n-4}+\cdots\cdots+1\right\}$$

今 $\rho>1$ トスレバ $\rho^{2n}>\rho^{2n-2}>\rho^{2n-4}>\cdots\cdots>1$ ナル故

$$|f(x)|>|a_0|\rho^n-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2+n\rho^{2n}\right)$$

故ニ $$|a_0|\rho^n-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2+n\rho^{2n}\right) \geqq 0$$ ナルトキ

即チ $$\frac{|a_0|-\sqrt{|a_0|^2-n\sum|a_i|^2}}{n} \leqq \rho^n \leqq \frac{|a_0|+\sqrt{|a_0|^2-n\sum|a_i|^2}}{n}$$

ナルトキ（根号ノ中ハ負トハナラナイ、　假定ニヨリ

$|a_0| \geqq \dfrac{n+\sum|a_i|^2}{2}$ デシカモ $\dfrac{n+\sum|a_i|^2}{2} \geqq \sqrt{n\sum|a_i|^2}$ ナル故デアル）. $|f(x)|>0$ トナル。

然ルニ $|a_0| \geqq \dfrac{n+\sum|a_i|^2}{2}$ ナル條件ニヨリ

$$\frac{|a_0|-\sqrt{|a_0|^2-n\sum|a_i|^2}}{n} \leqq 1$$

ナル故. $\rho>1$ ナルトキハ

$$\rho^n \leqq \frac{|a_0|+\sqrt{|a_0|^2-n\sum|a_i|^2}}{n}$$

ナラバ $|f(x)|>0$ トナル。

故ニ、任意ノ根ヲ α トスルトキ

$$|\alpha| \leqq 1 \text{ 或ハ } |\alpha| > \left[\frac{|a_0|+\sqrt{|a_0|^2 - n\sum|a_i|^2}}{n}\right]^{\frac{1}{n}} (\geqq 1)$$

ヲ得ル。

(定理)　n 次ノ代数方程式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + a_n = 0$$

ノ根ヲ α トシタトキニ　$(n \geqq k \geqq 1)$

(i)　$|\alpha| \leqq 1$ ナルトキハ $\dfrac{n + \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2}{2|a_{n-k}|} < 1$ ナルトキ

即チ $|a_{n-k}| > -1 + \sqrt{n+1+\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2}$ ナラバ

$$|\alpha| \leqq \left[\frac{n + \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2}{2|a_{n-k}|}\right]^{\frac{1}{k}} \quad (<1)$$

(ii)　$|\alpha| \geqq 1$ ナルトキハ $\dfrac{2|a_k|}{n + \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 - |a_k|^2} > 1$ ナルトキ

即チ　$|a_k| > -1 + \sqrt{n+1+\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2}$ ナラバ

$$|\alpha| \geqq \left[\frac{2|a_k|}{n + \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 - |a_k|^2}\right]^{\frac{1}{n-k}} \quad (>1)$$

(証明)　$|x| = \rho$ トスルトキ

$$|f(x)| \geqq |a_{n-k}|\rho^k - \left(|a_0|\rho^n + \cdots\cdots + |a_{n-k-1}|\rho^{k+1} + |a_{n-k+1}|\rho^{k-1} + \cdots\cdots + |a_n|\right)$$

$$\geqq |a_{n-k}|\rho^k - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\rho^{2n} + \cdots\cdots + \rho^{2(k+1)} + \rho^{2(k-1)} + \cdots\cdots 1\right)$$

$\rho \leqq 1$ ナラバ

$$|f(x)| \geqq |a_{n-k}|\rho^k - \frac{1}{2}\left(n+\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2 - |a_{n-k}|^2\right)$$

故ニ $\rho^k > \dfrac{n+\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2-|a_{n-k}|^2}{2|a_{n-k}|}$ ナラバ $|f(x)|>0$ トナル。

故ニ根ヲαトスルトキ，$|\alpha| \leqq 1$ ナラバ

$$|\alpha| \leqq \left(\frac{n+\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2-|a_{n-k}|^2}{2|a_{n-k}|}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$\dfrac{n+\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2-|a_{n-k}|^2}{2|a_{n-k}|} < 1$ ナラバ即チ $|a_{n-k}| > 1 + \sqrt{n+1+\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2}$

ナルトキハ $|\alpha| \leqq \left[\dfrac{n+\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2-|a_{n-k}|^2}{2|a_{n-k}|}\right]^{\frac{1}{k}} < 1$ トナッテ

(1)ノ結局ヲ得ル，$|\alpha| \geqq 1$ ナルトキハ $f(x)=0$ ナル方程式ノ根ノ逆数ヲ根トスル方程式 $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ ニ對シテ同様ニ論ズレバヨイ。

林鶴一先生ハ東北數學會雜誌2巻ニテ

$$(1) \quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots\cdots + a_n = 0;$$

$$a_0 > 0,\ a_i < 0\ \ (i = 1, \cdots\cdots, n)$$

ナル代數方程式ノ虚根ノ絶對値ハ

$$Max\left(\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|, \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|, \cdots\cdots, \left|\frac{a_2}{a_1}\right|\right)$$

ヨリ小ナルコトヲ證明サレタ。

(1)ハタゞ一ツノ正根αヲ有スルガ，ソノαニ對シ

$$\alpha \geqq \left(\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i a_{n+1-i}} \right)^{\frac{2}{n+1}}$$

ガ成立スル。

何者、$a_0\alpha^n = -a_1\alpha^{n-1} - a_2\alpha^{n-2} - \cdots\cdots - a_n$

右辺ヲ逆ノ順序ニナラベレバ

$$a_0\alpha^n = -a_n - a_{n-1}\alpha - \cdots\cdots - a_1\alpha^{n-1}$$

辺々相加ヘレバ

$$2a_0\alpha^n = (-a_1\alpha^{n-1} - a_n) + (-a_2\alpha^{n-2} - a_{n-1}\alpha) + \cdots \cdots\cdots (-a_n - a_1\alpha^{n-1})$$

$-a_i > 0 \ (i = 1, \cdots\cdots, n)$ ニ注意シテ $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ ナルトキハ $x + y \geqq 2\sqrt{xy}$ ナル不等式ヲ用ヰレバ結局

$$\alpha \geqq \left(\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i a_{n+1-i}} \right)^{\frac{2}{n+1}}$$

次ニ (2) $f(x) = a_0x^{2n+1} - a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} \cdots\cdots - a_{2n+1} = 0$

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_{2n+1} > 0$$

ナル方程式ノ任意ノ根ヲ α トスレバ $|\alpha| \leqq 1$ ナルコトヲ証明シヨウ。

(2) ヨリ

$$(\alpha+1)f(\alpha) = a_0\alpha^{2n+2} + (a_0 - a_1)\alpha^{2n+1} + (a_2 - a_1)\alpha^{2n} + \cdots\cdots + (a_{2n} - a_{2n+1})\alpha - a_{2n+1}$$

$$= 0$$

$$\therefore \ a_0\alpha = -(a_0 - a_1) - \frac{a_2 - a_1}{\alpha} - \cdots\cdots - \frac{a_{2n} - a_{2n+1}}{\alpha^{2n}} + \frac{a_{2n+1}}{\alpha^{2n+1}}$$

$|\alpha| > 1$ ナリト假定スレバ

$$|a_1||\alpha| \leqq |a_0-a_1|+|a_2-a_1|+\cdots\cdots+|a_{2n}-a_{2n+1}|$$
$$+|a_{2n+1}|$$

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_n > 0$$

ナル假定カラ

$$|\alpha| \leqq 1$$

之ハ $|\alpha|>1$ ト矛盾スル。

故ニ $|\alpha| \leqq 1$ デアル。

同様ニシテ

$$f(x)=a_0x^{2n}-a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}-\cdots\cdots+a_{2n}=0$$
$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_{2n} > 0$$

ナル方程式ノ任意ノ根ヲ α トシタトキ $|\alpha| \leqq 1$ ガ成リ立ツ。

以上ノ事ヲアハセレバ

$$f(x)=a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^n a_n=0$$
$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_n > 0$$

ノ任意ノ根 α ニ對シテ $|\alpha| \leqq 1$ ナルコトガ云ヘタ。

高橋進一氏ハ

$$(3) \quad f(x)=(a_0+ib_0)x^n+(a_1+ib_1)x^{n-1}+(a_2+ib_2)x^{n-2}$$
$$+\cdots\cdots+(a_n+ib_n)=0$$

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_n > 0,$$
$$b_0 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots\cdots \geqq b_n > 0$$

ナル n 次ノ代數方程式ノ任意ノ根 α ニ對シ、常ニ $|\alpha| \leqq \sqrt{2}$ ナルコトヲ證明サレタ。

高橋氏ハ如何ニシテ證明サレタカハ知ラヌガ、多分同一ト思ハレルケレドモ、次ニ掲ゲルコトニスル。

(3) ヨリ $(\alpha-1)f(\alpha)=(a_0+ib_0)\alpha^{n+1}+\{(a_1-a_0)+i(b_1-b_0)\}\alpha^n$

$+\{(a_2-a_1)+i(b_2-b_1)\}\alpha^{n-1}+\cdots\cdots\{(a_n-a_{n-1})+i(b_n-b_{n-1})\}\alpha$

$-(a_n+ib_n)=0$

$$\therefore\quad |a_0+ib_0||\alpha|\leqq|(a_1-a_0)+i(b_1-b_0)|$$

$$+\frac{|(a_2-a_1)+i(b_2-b_1)|}{|\alpha|}+\frac{|(a_3-a_2)+i(b_3-b_2)|}{|\alpha|^2}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{|(a_n-a_{n-1})+i(b_n-b_{n-1})|}{|\alpha|^{n-1}}+\frac{|a_n+ib_n|}{|\alpha|^n}$$

$|\alpha|<1$ ナル α ニ對シテハ $|\alpha|\leqq\sqrt{2}$ ナル故 $|\alpha|\geqq 1$ ナル α ノミヲ考ヘレバヨイ。

$$\therefore\quad |a_0+ib_0||\alpha|\leqq|a_1-a_0|+|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots\cdots+|a_n-a_{n-1}|+|a_n|$$

$$+|b_1-b_0|+|b_2-b_1|+|b_3-b_2|+\cdots\cdots+|b_n-b_{n-1}|+|b_n|$$

$a_0\geqq a_1\geqq a_2\geqq\cdots\cdots\geqq a_n>0,\quad b_0\geqq b_1\geqq b_2\geqq\cdots\cdots\geqq b_n>0$

ナル故

$$|\alpha|\leqq\frac{a_0+b_0}{|a_0+ib_0|}\leqq\sqrt{2}$$

コノ結果ヲ使ヘバ

(4) $f(x)=(a_0+ib_0)x^n+(a_1+ib_1)x^{n-1}+(a_2+ib_2)x^{n-2}$

$$+\cdots\cdots+a_n+ib_n=0$$

$$a_i>0,\quad b_i>0\quad (i=0,1,2,3,\cdots\cdots,n)$$

ナル n 次ノ代數方程式ノ任意ノ根ヲ α トスレバ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\min\left(\frac{a_0}{a_1},\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_3},\cdots\cdots,\frac{a_{n-1}}{a_n};\frac{b_0}{b_1},\frac{b_1}{b_2},\frac{b_2}{b_3},\cdots\cdots,\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)$$

$$\leqq |\alpha| \leqq \sqrt{2}\, Max\left(\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \cdots\cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\ ;\ \frac{b_0}{b_1}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{b_2}{b_3}, \cdots\cdots, \frac{b_{n-1}}{b_n}\right)$$

ナルコトが証明サレル。

$g(x) = f(px)$ トオク。

$$p = Max\left(\frac{a_0}{a_1}, \cdots\cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\ ;\ \frac{b_0}{b_1}, \cdots\cdots, \frac{b_{n-1}}{b_n}\right)$$

トスレバ

$$a_0 p^n \geqq a_1 p^{n-1} \geqq a_2 p^{n-2} \geqq \cdots\cdots \geqq a_n > 0,$$

$$b_0 p^n \geqq b_1 p^{n-1} \geqq b_2 p^{n-2} \geqq \cdots\cdots \geqq b_n > 0$$

$g(x) = 0$ ハ (3) ナル方程式ト同ジ條件ヲモツカラ $g(x) = 0$ ノ任意ノ根 β ニ對シ

$$|\beta| \leqq \sqrt{2}$$

即チ $f(x) = 0$ ノ根 α ニ對シ

$$|\alpha| = |p\beta| \leqq \sqrt{2}\, p$$

$$\therefore\ |\alpha| \leqq Max\left(\frac{a_0}{a_1}, \cdots\cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\ ;\ \frac{b_0}{b_1}, \cdots\cdots, \frac{b_{n-1}}{b_n}\right)$$

$$|\alpha| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\, min\left(\frac{a_0}{a_1}, \cdots\cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\ ;\ \frac{b_0}{b_1}, \cdots\cdots, \frac{b_{n-1}}{b_n}\right)$$

ヲ出スニハ $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ニ対シ，上ノ議論ヲクリカヘセバヨイ。

(注意) 實ハ (3) ナル方程式ノ根ノ絶對値ノ上限 ρ ヲ $\sqrt{2}$ トオキカヘラレル。$(1 < \rho < \sqrt{2})$

——（完）——