946. 単葉函数ノ一定理ニ就キテ

春木　博（神戸高船）

Bieberbach ハ次ノ定理ヲ証明シタ。

$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ有理型，且ツ単葉ナルトキ、$|z|<1$ ノ $f(z)$ ニヨル寫像ハ w 平面ニ於テ $|w|<\sqrt{5}-2$ ナル円板ヲ含ムカ或ハ $|w|>\sqrt{5}+2$ ナル領域ヲ含ムカ何レカデアル。

$\sqrt{5}-2$, $\sqrt{5}+2$ ナル常数ガ best possible ナ値デアルコトハ

$$f(z)=\frac{(\sqrt{5}-2)z}{z+(\sqrt{5}-2)^2(1-z)^2}=z+\cdots\cdots$$

ガ $|z|<1$ デ有理型且ツ單葉デシカモ $|z|<1$ ヲ w 平面ニ於テ $\sqrt{5}-2\leqq w\leqq\sqrt{5}+2$ ヲ除イタ領域ニ寫像スルコトカラ判ル。

今逆ニ $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ有理型、且ツ單葉デシカモ $f(z)\neq\sqrt{5}\pm2$ ナラバ

$$f(z)=\frac{(\sqrt{5}-2)z}{z+(\sqrt{5}-2)^2(1-z)^2}$$

トナルコトヲ證明シヨウ。

$$g(z)=\frac{-\alpha f(z)}{f(z)-\alpha}\qquad(\alpha=\sqrt{5}-2)$$

トオケバ $g(z)$ ハ $|z|<1$ デ正則單葉デ $z+b_2z^2+\cdots\cdots$ ナル展開ヲ有スル。シカモ $g(z)$ ハ $-\frac{1}{4}$ ナル値ヲトラナイ。何者、$g(z)$ ガ $-\frac{1}{4}$ ナル値ヲトレバ $f(z)$ ハ $\sqrt{5}+2$ ナル値ヲトルコトガ判リ、$f(z)\neq\sqrt{5}-2$ ニ背クカラデアル。故ニ以前證明シタコトニヨリ

$$g(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

オキモドセバ、所要ノ $f(z)$ ノ形ガキマル。

（完）