940. 單葉函數ノ一定理ニ就イテ

春木　博（神戸高等商船）

$f(z)=\alpha+\beta z^2$（α, β ハ複素常數，$\beta\neq 0$）ハ $R(z)>0$ デ正則且ツ單葉デ $f'(1)=f''(1)$ デアル。

今逆ニ $f(z)$ ガ $R(z)>0$ 正則且ツ單葉デ $f'(1)=f''(1)$ ナラバ、$f(z)=\alpha+\beta z^2$（α, β ハ複素常數，$\beta\neq 0$）トナルコトヲ證明シヨウ。

（證明）　$g(\zeta)=f\left(\dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$ トオケバ、$f(z)$ ガ $R(z)>0$ デ正則、單葉ナル故，$g(\zeta)$ ハ $|\zeta|<1$ デ正則單葉デアル。
$g(\zeta)$ ヲ展開スレバ

$$g(\zeta)=f(1)+2f'(1)\zeta+2\left\{f'(1)+f''(1)\right\}\zeta^2+\cdots\cdots$$

シカルニ $f(z)$ ハ $R(z)>0$ デ單葉ナル故 $f'(1)\neq 0$ デアル。$f'(1)=f''(1)=\alpha\neq 0$ トオケバ

$$g(\zeta)=f(1)+2\alpha\zeta+4\alpha\zeta^2+\cdots\cdots$$

$$h(\zeta)=\frac{g(\zeta)-f(1)}{2\alpha}$$

トオケバ

$$h(\zeta)=\zeta+2\zeta^2+\cdots\cdots$$

$g(\zeta)$ ガ $|\zeta|<1$ デ、正則單葉ナル故 $h(\zeta)$ モ亦 $|\zeta|<1$ デ正則單葉デアル，シカモ $h(\zeta)$ ハ ζ^2 ノ係數ガ２ナル故以前述ベタコトニヨリ

$$h(\zeta)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

オキモドセバ、結局

$$f(z)=\alpha+\beta z^2 \quad (\alpha, \beta \text{ ハ複素常数}, \ \beta \neq 0)$$

ヲ得ル。

—— (完) ——