935. 確率法則ノ組類別 II（補正）

國澤　清典（阪大）

談話910デコノ問題ヲ述ベマシタガ代表法則ノ取方ニ面白クナイ所ガアッテ氣ニカカッテイマシタ所、近着ノ *Studia Math.* ヲ見ルト Doeblin ハ dispersion（收幅度）ヲ使ッテ代表法則ヲ作ッテイマス。然シ Doeblin ノ考ヘタノハ意外ニモ對稱律ノ成立シナイ écart ヲ作ル場合デアッテ問題ハ簡單デ殆ンド trivial トナリマス。然シ dispersion（收幅度）ノ考ハ面白イノデ、此レヲ使ッテ再ビ對稱律ノ成立スル écart ヲ作ル問題ヲ述ベ、次ニコレニ關聯シテ何ノヤウナ場合ニ $F_n(a_n x + b_n) \longrightarrow F(x)$ カラ $a_n \longrightarrow 1$, $b_n \longrightarrow 0$ ガ出テクルカヲ主トシテ述ベマス。（定理3）

代表法則ヲ次ノ樣ニ取ル。先ヅ median ハ zero デ $F(x) = \frac{1}{2}$ ナル x ガ澤山アレバ此レ x ノ中央ヲトル事ニシテ $d(\alpha)$ ヲ $F(x)$ ノ Probability α ニ對スル收幅度ヲ示ス事トスレバ

$$d\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = 1$$

ナル樣ナ法則ヲ class カラ選ブ。

此処ニ β ハ

$$\beta = \max_{x}\left(F(x+0) - F(x-0)\right)$$

（$F(x)$ ハ class ノ任意ノ法則デ良イ。）

談話910ノ定理1及ビ定理2ノ前半ハ代表法則ノ取方ニハ無関係デアルカラ定理2ノ後半ヲ証明スレバ良イ。

即チ $\{K_n\}$ ガ K ニ Khintchin ノ意味デ級列収斂スルト ecart ノ意味デモ K ニ収斂スル部分系列 $\{K_{n_i}\}$ ガ存在スルコトヲ証明スレバ良イ。

假定ヨリ $K_n \ni F_n(a_n x + b_n)$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ガ存在シテ

$$F_n(a_n x + b_n) \longrightarrow F(ax + b)$$

デアルガ此レハ最初カラ

$$F_n(a_n x + b_n) \longrightarrow F(x)$$

トシテ良イ。此処ニ $F_n(x)$, $F(x)$ ハソレゾレ K_n, K ノ代表法則ヲ表ハス。

先ヅ β_n ヲ $F_n(x)$ ノ最大ノ jump。β ヲ $F(x)$ ノソレトシタ時ニ $\beta_n \to \beta$ デアルコトヲ証明スル。

$F_n(a_n x + b_n) \longrightarrow F(x)$ デアルカラ $\varepsilon > 0$ ヲ任意ノ正数トシ充分大キナ n ニツキ $\sqrt{2}\,\varepsilon$ ノ幅ヲモツ或區間デ少クトモ $\beta - \sqrt{2}\,\varepsilon$ ノ Probability ヲモツ。$\varepsilon > 0$ ハ任意デアルコトカラ

$$\underline{\lim}\, \beta_n \geq \beta$$

デアル事ガワカル。次ニ (n, ε_n); $n \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$ ヲ選ンデ

$$(F_n(a_n x + b_n),\ F(x)) \leqq \varepsilon_n$$

ガ成立スル様ニスルコトガ出来ル。

故ニ $F(x)$ ハ $\sqrt{2}\,\varepsilon_n$ ノ幅ヲモツ或ル區間デ Probability $\beta_n - \sqrt{2}\,\varepsilon_n$ ヲモツ。故ニ $n \to \infty$ ナラシメルト

$$\overline{\lim}\ \beta_n \leqq \beta$$

故ニ

$$\lim_{n \to \infty} \beta_n = \beta$$

故ニ充分大ナル n ニツキ

$$\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon + \sqrt{2}\,\varepsilon \leqq \frac{1+\beta_n}{2}$$

$$\leqq \frac{1+\beta}{2} + \varepsilon$$

次ニ $\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon$ ニ對スル $F(x)$ ノ收幅度 $d\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon\right)$ ヲモツ區間 (x_1, x_2) ヲトルト

$$F_n(a_n x + b_n) \longrightarrow F(x)$$

ナル故ニ X_n ヲ $F_n(x)$ ニ從フ確率變數トスレバ充分大キイ n ニツキ

$$P_r\left\{x_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leqq \frac{X_n}{a_n} - \frac{b}{a_n} \leqq x_2 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\leq \frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon + \sqrt{2}\,\varepsilon$$

故ニ

$$\frac{d_n\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon + \sqrt{2}\,\varepsilon\right)}{a_n} \geq (x_2 - x_1) - \sqrt{2}\,\varepsilon$$

$$= d\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon\right) - \sqrt{2}\,\varepsilon$$

故ニ

$$\frac{d_n\left(\frac{1+\beta_n}{2}\right)}{a_n} \geq \frac{d_n\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon + \sqrt{2}\,\varepsilon\right)}{a_n}$$

$$\geq d\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon\right) - \sqrt{2}\,\varepsilon$$

然ルニ

$$\frac{d_n\left(\frac{1+\beta_n}{2}\right)}{a_n} = \frac{1}{a_n}$$

デアルカラ

$$\frac{1}{a_n} \geq d\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon\right) - \sqrt{2}\,\varepsilon$$

故ニ

$$\underline{\lim}\,\frac{1}{a_n} \geq d\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon\right) - \sqrt{2}\,\varepsilon$$

$\varepsilon \longrightarrow 0$ ナラシメルト $d(\alpha)$ ハ下半連續デアルカラ

$$\underline{\lim}\frac{1}{a_n}\geq d\left(\frac{1+\beta}{2}\right)=1$$

$$1\geq\overline{\lim}\ a_n$$

一方又 $F_n(a_nx+b_n)\longrightarrow F(x)$ ナルコトヨリ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シ充分大キイ n ヲ取ルト

$$Pr\left\{l_1-\varepsilon\leqq\frac{X_n}{a_n}-\frac{b_n}{a_n}\leqq l_2+\varepsilon\right\}$$

$$\geqq\frac{1+\beta}{2}-\varepsilon$$

但シ此処ニ (l_1, l_2) ナル區間ハ $\frac{1+\beta}{2}$ ニ對スル收幅度 $d\left(\frac{1+\beta}{2}\right)=1$ ヲモツ區間トスル。

依ツテ

$$\frac{d_n\left(\frac{1+\beta}{2}-\varepsilon\right)}{a_n}\leqq(l_2-l_1)+2\varepsilon$$

$$=1+2\varepsilon$$

故ニ

$$\frac{d_n\left(\frac{1+\beta_n}{2}-2\varepsilon\right)}{a_n}\leqq\frac{d_n\left(\frac{1+\beta}{2}-\varepsilon\right)}{a_n}\leqq1+2\varepsilon$$

$\varepsilon\longrightarrow0$ ナラシメルト

$$\frac{d_n\left(\frac{1+\beta_n}{2}\right)}{a_n}\leqq1$$

故ニ

$$\overline{\lim}\frac{1}{a_n}\leq 1$$

$$\underline{\lim}\, a_n \geq 1$$

以上デ

$$1\geq\overline{\lim}\, a_n\geq\underline{\lim}\, a_n\geq 1$$

故ニ

$$\lim a_n = 1$$

次ニ $b_n\longrightarrow 0$ デアルコトヲ示ス。

代表法則ノ作リ方カラシテ $(-1,\ 1)$ ナル區間ニ $F(x)$ ハ少クトモ Probability $\frac{1}{2}$ ヲ有シテイルコトカラ充分大キイ n ニツキ

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right|\leq 1$$

又 $F_n(a_n x+b_n)\longrightarrow F(x)$ ナル故ニ如何ニ大キナ正數 α ニ對シテモ

$$F_n(\alpha a_n x+\alpha b_n)\longrightarrow F(\alpha x)$$

此レヨリ

$$\left|\frac{\alpha b_n}{\alpha a_n}\right|=\left|\frac{b_n}{a_n}\right|$$

ハ如何程ニテモ小ナラシメル事が出來ル。

以上デ

$$a_n\longrightarrow 1$$
$$b_n\longrightarrow 0$$

ト云フコトが分ッタ。此レがワカルト前議論同様ニシテ

Khintchin ノ意味デ收斂シテオレバ écart デモ收斂スルコトガ云ヘル。

$F_n(x)$ ヲ class ノ代表法則ト限ラナケレバ

$$F_n(a_n x + b_n) \longrightarrow F(x)$$

ガ成立シテモ $a_n \longrightarrow 1$, $b_n \longrightarrow 0$ ハ勿論成立シナイ例ハ澤山アル。ソコデ定理3トシテ

$\boxed{\text{定理 3}}$ $F_n(x)$ $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ ヲ上述ノヤウナ代表法則ニトレバ若シ $F_n(a_n x + b_n) \rightarrow F(x)$ ナラバ

$$a_n \rightarrow 1, \quad b_n \rightarrow 0$$

ガ成立スル。

écart ヲ導入シタコトニヨリ空間Rノ位相的性質ヲシラベル時ニ幾分便利ニナッタ様ニ思ヒマス。此レニツイテハソノ中述ベテミタイト思ヒマス。