

932. 再び單葉函數ノ除外値ニ就キテ

春 水 博(神戸商船)

$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$ が $|z| < 1 =$
 ラ正則、且ツ單葉ナリトシ、 $|z| < 1$ デ $f(z)$ キムナリトス
 ル。

シカラバ

$$|\alpha| \geq \sqrt[3]{\frac{-Q + \sqrt{Q^2 + 4P^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-Q - \sqrt{Q^2 + 4P^3}}{2}}$$

$$- \frac{1}{3} \frac{|a_2^2 + 2a_3|}{4 + |a_4|}$$

茲 =

$$P = -\frac{1}{9} \frac{|a_2^2 + 2a_3|^2}{(4 + |a_4|)^2} + \frac{|a_2|}{4 + |a_4|}$$

$$Q = \frac{2}{27} \frac{|a_2^2 + 2a_3|^3}{(4 + |a_4|)^3} - \frac{|a_2| |a_2^2 + 2a_3|}{(4 + |a_4|)^2} - \frac{1}{4 + |a_4|}$$

(証明) $g(z) = -\alpha^2 \left(\frac{1}{f(z) - \alpha} + \frac{1}{\alpha} \right)$ を考へれば $f(z)$

が $|z| < 1$ で正則、單葉、 $\alpha \in |z| < 1$ なら $f(z) \neq \alpha + 1$ 故、
 $g(z)$ は $|z| < 1$ 上で正則單葉である。

$g(z)$ を展開すれば

$$g(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \dots$$

施氏ノ定理ニヨリ $|b_4| \leq 4$

即ち $|a_4 \alpha^3 + 2a_3 \alpha^2 + a_2^2 \alpha^2 + 3a_2 \alpha + 1| \leq 4|\alpha|^3$

之ヨリ $(4 + |a_4|)|\alpha|^3 + |a_2^2 + 2a_3||\alpha|^2 + 3|a_2||\alpha| - 1 \geq 0$

$$(4 + |a_4|)x^3 + |a_2^2 + 2a_3|x^2 + 3|a_2|x - 1 = 0$$

上ニ三方程式ハ、Descartesノ符号律ニヨリ容易ニ正根ハ一ツトナルコトが判ルカラ、ソレヲ ρ トスレバ

$$|\alpha| \geq \rho$$

結局上記ノ結果ヲ得ル。

次ニ、或ルニツノ不等式ヲ証明シテ見ヨク。假定ハ全ク前ト同じナルトキ

$$|f(z) - \alpha| \leq |\alpha| \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2, \quad \left| \arg \left(1 - \frac{f(z)}{\alpha} \right) \right| \leq 2 \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

が成立スル。

(証明)

$$g(z) = \frac{(f(z)-a)^2}{(1-|z|^2)f'(z)} \left\{ \frac{1}{f\left(\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)-a} - \frac{1}{f(z)-a} \right\}$$

ヲ作レバ $f(z)$ が $|z| < 1$ 正則、單葉デシカモ $|z| < 1$ デ $f(z) \neq a$ ナルコトカラ $g(z)$ ハ $|z| < 1$ 正則單葉デアル。

$g(z)$ ヲ展開スレバ

$$g(z) = z + \frac{(1-|z|^2)f''(z)(f(z)-a) - f'(z)\{2\bar{z}(f(z)-a) + 2f'(z)(1-|z|^2)\}}{2(f(z)-a)f'(z)} + \dots$$

$g(z)$ ハ $|z| < 1$ 正則單葉ナル故、 Bieberbach 定理ニヨリ

$$\left| \frac{(1-|z|^2)f''(z)(f(z)-a) - f'(z)\{2\bar{z}(f(z)-a) + 2f'(z)(1-|z|^2)\}}{2(f(z)-a)f'(z)} \right| \leq 2$$

$$\text{之ヨリ} \quad \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} - \frac{2zf'(z)}{f(z)-a} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

$$\text{之ヨリ} \quad \left| z \frac{2f'(z)}{f(z)-a} \right| \leq \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| + \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

シカモ $f(z)$ ハ $|z| < 1$ 正則單葉ナル故

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

$$\text{故} = \left| z \frac{f'(z)}{f(z)-a} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

$$\text{故} = \operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} \right) \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2}$$

$$\operatorname{Im} \left(z \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} \right) \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2}$$

レカレ =

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} \right) = |z| \frac{d \log |f(z) - \alpha|}{d|z|}$$

$$\operatorname{Im} \left(z \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} \right) = |z| \frac{d \arg(f(z) - \alpha)}{d|z|}$$

ナル故

$$\frac{d \log |f(z) - \alpha|}{d|z|} \leq \frac{4}{1 - |z|^2}$$

$$\frac{d \arg(f(z) - \alpha)}{d|z|} \leq \frac{4}{1 - |z|^2}$$

コノ両式ヲ0ヨリ $|z|$ マデ積分スルコトニヨリ

$$|f(z) - \alpha| \leq |\alpha| \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2$$

$$\left| \arg \left(1 - \frac{f(z)}{\alpha} \right) \right| \leq 2 \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

—— (完) ——