931. Vollständig primärer Ring ノ上ノ行列環ニツイテノ注意

松島與三（阪大中期）

primärer Ring ノ構造ノ主定理トシテ「ソレハvollständig primärer Ring ノ上ノ行列環ニナル」ガアリマスガ。ソノ逆ハ無條件ニハ成立タナイ様デス。Deuring ノ本ニハ voll. primärer Ring 上ノ行列環ガ halbprimär ナラバ，ソレハ primär デアルトイフ風ニアリマスガ、証明ヲ見レバ Radikal ノ存在ダケシカ假定シテアリマセン．ソコデコレヲモウ少シ弱イ條件デ置キカヘルコトヲ考ヘテ見マシタ。

マヅ準備トシテ

Def. Schiefring $\mathfrak{O}$ ガ Eins ヲモチ、Radikal $\mathfrak{R}$ ガアッテ、Restklassenring $\mathfrak{O}/\mathfrak{R}$ ガ einfach ニナル場合 $\mathfrak{O}$ ヲ primär ト云フ。
$\mathfrak{O}/\mathfrak{R}$ ガ更ニ Schiefkörper ニナル場合ヲ vollständig primär トイフ．（Radikal ノ定義ハ Deuring ノ本ニヨル）

1. $\mathfrak{O}$ ガ primär ナラバ．eigentlich ナ reguläres zweiseitigs Ideal ヲモタナイ．又einseitig ナ reguläres Ideal ハ Idempotent ヲ有スル．但シ reguläres Ideal トハ少クトモ1ツ

nilpotent ナラザル Element ヲフクム Ideal ヲイフ。

(証)

$\mathfrak{o}$ ガ regulär ナ両側 Ideal $\mathfrak{b}$ ヲフクメバ $(\mathfrak{b}, \mathfrak{n})/\mathfrak{n}$ ハ $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$, (0) ナラザル両側 Ideal デ $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ ハ einfach デアルカラ, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{n})/\mathfrak{n} = \mathfrak{o}/\mathfrak{n}$. 故ニ $(\mathfrak{b}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{o}$.

故ニ $\mathfrak{o}$ ノ Eins e ハ $e = b + r \quad b \in \mathfrak{b} \quad r \in \mathfrak{n}$ ト表サレル。

$$e = e^2 = b^2 + br + rb + r^2$$

$\mathfrak{b}$ ハ両側 Ideal ダカラ $b^2 + br + rb = b^{(1)} \in \mathfrak{b}$

$$= b^{(1)} + r^2$$

同様ニシテ $e = e^n = b^{(n)} + r^{2n}$ n ヲ十分大ニトレバ $r^{2n} = 0$

$$= b^{(n)} \in \mathfrak{b}$$

故ニ $\qquad \mathfrak{o} = \mathfrak{b}$

次ニ $\mathfrak{l}$ ヲ $\mathfrak{o}$ ノ regulär ナ左 Ideal トスレバ, $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}\mathfrak{o}$ ナル故 $\mathfrak{l}\mathfrak{o}$ ハ regulär ナ両側 Ideal ニナリ. 故ニ

$\mathfrak{l}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$

従ッテ $e = b \cdot a \quad b \in \mathfrak{l} \quad a \in \mathfrak{o}$ ト表サレル.

$ab \in \mathfrak{l}$ デ $(ab)a = a(ba) = a \neq 0$ ダカラ $ab \neq 0$ デ

$ab \cdot ab = a \cdot ba \cdot b = ab$ デ ab ハ $\mathfrak{l}$ ニフクマレル

Idempotent デアル。 (q.e.d)

vollständig primarer Ring $\mathfrak{o}$ ハ Eins 以外ニ Idempotent ヲフクマヌカラ、(Kleurring, Algebren P. 18) 上ノコトヨリ, regulär ナ einseitiges Ideal ハ Eins ヲフクミ、従ツテ, $\mathfrak{a}$ ハ eigentlich ナ reguläres Ideal ヲフクマヌコトがワカル,

2. Schiefring $\mathfrak{a}$ ノ2ツノ Linksnilideal $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ ヲトルトキ Summe $(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2)$ ハ Idempotent ヲフクマナイ。

コレハ, Köthe ノ論文 (Math. Zeit. 32, 1930) ニ証明シテアリマス。

3. $\mathfrak{O}$ ヲ vollständig primärer Ring トシ、$\mathfrak{O}_s$ ヲ $\mathfrak{O}$ ノ上ノ s 次ノ Matrizenring トスル. $\mathfrak{O}_s$ が primär ナルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ $\mathfrak{O}_s$ ノ reguläres Ideal が Idempotent ヲフクムコトデアル。

(証)

必要ナルコトハ 1 ヨリ明カデス。

十分ナルコト $\mathfrak{O}$ ノ Radikal ヲ $\mathfrak{R}'$ トスル。

$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'c_{11} + \mathfrak{R}'c_{12} + \cdots\cdots + \mathfrak{R}'c_{ik} + \cdots\cdots + \mathfrak{R}'c_{ss}$ トスレバ $\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{O}_s$ ノ両側 Ideal ナルコトハ明カデアル。(但シ c_{ik} ハ行列単位) $\mathfrak{l}_i = \mathfrak{R}'c_{1i} + \mathfrak{R}'c_{2i} + \cdots\cdots + \mathfrak{R}'c_{si}$ トオケバ, $\mathfrak{l}_i$ ハ $\mathfrak{O}_s$ ノ Linksnilideal デ, $\mathfrak{R} = \mathfrak{l}_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{l}_s$ デアルカラ、2 ト假定ヨリ $\mathfrak{R}$ ハ Nilideal