929. 單葉函數ノ除外値ニ就キテ

春木　博（神戸高等商船学校）

$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ ニテ正則單葉ナルトキ、ソノ除外値 α ノ絶對値ノ評價ヲシテミル。$|\alpha|\geqq\frac{1}{4}$ ナルコトハヨク知ラレテヰル。

(A) $$|\alpha|\geqq\frac{1}{2+|a_2|}$$

(B) $$|\alpha|\geqq\frac{-|a_2|+\sqrt{3+|a_2|^2+|a_3|}}{3+|a_3|}$$

（證明）$|z|<1$ ニテ $f(z)\neq\alpha$ ナル故

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-\alpha}$$

ハ $|z|<1$ ニテ正則デアル。シカモ $f(z)$ ガ $|z|<1$ ニテ單

葉ナルコトカラ $g(z)$ モ亦 $|z|<1$ ニテ單葉デアルコトハ明カデアル。$g(z)$ ヲ展開スレバ

$$g(z)=-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}z-\frac{a_2\alpha+1}{\alpha^3}z^2-\frac{a_3\alpha^2+2a_2\alpha+1}{\alpha^4}z^3+\cdots\cdots$$

故ニ $h(z)=-\alpha^2\left(g(z)+\frac{1}{\alpha}\right)$ トオケバ

$$h(z)=z+\frac{a_2\alpha+1}{\alpha}z^2+\frac{a_3\alpha^2+2a_2\alpha+1}{\alpha^2}z^3+\cdots\cdots$$

$h(z)$ ハ $|z|<1$ ニテ正則單葉デアル。故ニ Bieberbach ノ定理及ビ Löwner ノ定理ニヨリ

$$\left|\frac{a_2\alpha+1}{\alpha}\right|\leqq 2,\quad \left|\frac{a_3\alpha^2+2a_2\alpha+1}{\alpha^2}\right|\leqq 3$$

之レヨリ (A) 及ビ (B) ヲ得ル。

(注意) $\dfrac{1}{2+|a_2|}>\dfrac{-|a_2|+\sqrt{3+|a_2|^2+|a_3|}}{3+|a_3|}$ ナルトキ，

即チ $|a_2|^2+|a_3|>1$ ナルトキハ (A) ノ評價ガヨク，

$\dfrac{1}{2+|a_2|}<\dfrac{-|a_2|+\sqrt{3+|a_2|^2+|a_3|}}{3+|a_3|}$ ナルトキ，即チ

$|a_2|^2+|a_3|<1$ ナルトキハ (B) ノ評價ガヨク、$|a_2|^2+|a_3|=1$ ナルトキハ (A), (B) ハ同ジ評價トナル。

(A) ニヨリ、$f(z)$ ガ絶對値 $\frac{1}{4}$ ノ値、即チ $\frac{1}{4}e^{i\theta}$ (θ ハ實數) ナル値ヲトラナケレバ

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{-i\theta}z)^2}$$

ナルコトガ證明サレル。

何者、(A)ニ於テ $\alpha=\frac{1}{4}e^{i\theta}$ トスレバ

$$|a_2|\geqq 2$$

又一方 Bieberbach ノ定理ニヨリ $|a_2|\leqq 2$ ナル故、$|a_2|=2$ ヲ得ル。アトハ、Bieberbach ノ定理 $|a_2|\leqq 2$ ヲ証明シタト同様ノ方針ニヨリ

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{-i\theta}z)^2}$$

ナルコトヲ証シ得ル。

次ニ $f(z)$ ガ二ツノ除外値 α,β ヲモツ場合ヲ考察シヨウ。

(結果) $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則且ツ単葉ニシテ、シカモ $|z|<1$ デ $f(z)\neq\alpha$, $f(z)\neq\beta$ ナリトスレバ (但シ $\alpha+\beta\neq 0$ ナリトス)

$$\text{(C)}\quad |\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+a_2(\alpha+\beta)\alpha\beta| \leqq 2|\alpha\beta|\left\{|\alpha+\beta|+1+\sqrt{2|\alpha+\beta|+1}\right\}$$

$$\text{(D)}\quad |\alpha+\beta|\,|(\alpha+\beta)(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2) -2a_2\alpha\beta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-a_3\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)| \leqq 3|\alpha\beta|^2\left\{|\alpha+\beta|+1+\sqrt{2|\alpha+\beta|+1}\right\}^2$$

(証明) $f(z)\neq\alpha$, $f(z)\neq\beta$ ナル故

$$g(z)=\frac{1}{(f(z)-\alpha)(f(z)-\beta)}$$

ハ $|z|<1$ ニテ正則デアル。シカモ $g(z)$ ハ

$$|z|<\rho=\frac{|\alpha+\beta|+1-\sqrt{2|\alpha+\beta|+1}}{|\alpha+\beta|}$$

ニテ単葉デアル。

何者、$|z_1|<\rho$, $|z_2|<\rho$, $g(z_1)=g(z_2)$ トスレバ

$$(f(z_1)-\alpha)(f(z_1)-\beta)=(f(z_2)-\alpha)(f(z_2)-\beta)$$

$$\therefore\ (f(z_1)-f(z_2))(f(z_1)+f(z_2)-(\alpha+\beta))=0$$

シカルニ $f(z)$ ハ $|z|<1$ ニテ単葉ナル故

$$|f(z_1)|\leqq\frac{|z_1|}{(1-|z_1|)^2},\quad |f(z_2)|\leqq\frac{|z_2|}{(1-|z_2|)^2}$$

$|z_1|<\rho$, $|z_2|<\rho$ ナル故

$$|f(z_1)|<\frac{|\alpha+\beta|}{2},\quad |f(z_2)|<\frac{|\alpha+\beta|}{2}$$

$$\therefore\ |f(z_1)+f(z_2)|<|\alpha+\beta|$$

$$\therefore\ f(z_1)+f(z_2)\neq\alpha+\beta$$

従ッテ $f(z_1)\neq f(z_2)$. 従ッテ又 $z_1=z_2$ ヲ得ル。

故ニ

$$h(z)=\frac{1}{(f(\rho z)-\alpha)(f(\rho z)-\beta)}$$

トオケバ $h(z)$ ハ $|z|<1$ ニテ正則単葉デアル。$h(z)$ ヲ展開スレバ

$$h(z)=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2\beta^2}\rho z+\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+a_2(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3}\rho^2z^2$$
$$-\frac{1}{\alpha^4\beta^4}\{(\alpha+\beta)(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)$$
$$-2a_2\alpha\beta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-a_3\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)\}\rho^3z^3+\cdots\cdots$$

故ニ $t(z)=\dfrac{\alpha^2\beta^2}{\rho(\alpha+\beta)}\left(h(z)-\dfrac{1}{\alpha\beta}\right)$ トオケバ

$$t(z)=z+\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+a_2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}\rho z^2$$

$$-\frac{1}{\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)}\Big\{(\alpha+\beta)(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)$$

$$-2a_2\alpha\beta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-a_3\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)\Big\}\rho^2z^3+\cdots\cdots$$

$t(z)$ ハ $|z|<1$ ニテ正則単葉ナル故 Bieberbach ノ定理及ビ Löwner ノ定理ニヨリ

$$\left|\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+a_2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}\rho\right|\leqq 2$$

$$\Big|\frac{\rho^2}{\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)}\Big\{(\alpha+\beta)(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)$$

$$-2a_2\alpha\beta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-a_3\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)\Big\}\Big|\leqq 3$$

之レヨリ (C), (D) ヲ得ル。

$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ ニテ正則単葉トスルトキ、以上ノ結果ヨリ

$$|\alpha|<\frac{1}{2+|a_2|}\quad 又ハ\quad |\alpha|<\frac{-|a_2|+\sqrt{3+|a_2|^2+|a_3|}}{3+|a_3|}$$

ガ成立スレバ $f(z)$ ハ α ナル値ヲ取ルコトガ判ル。

更ニ、$\alpha+\beta\neq 0$ ナル α,β ニ對シテ

$$|\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+a_2(\alpha+\beta)\alpha\beta|$$
$$>2|\alpha\beta|\left\{|\alpha+\beta|+1+\sqrt{2|\alpha+\beta|+1}\right\}$$

又ハ

$$|\alpha+\beta|\,|(\alpha+\beta)(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)$$
$$-2a_2\alpha\beta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-a_3\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)|$$

$$> 3|\alpha\beta|^2\left\{|\alpha+\beta|+1+\sqrt{2|\alpha+\beta|+1}\right\}^2$$

ガ成立スレバ $f(z)$ ハ α カ β カ何レカ一方ノ値ヲ取ルコトガ判ル。

—— (完) ——