925. Teilweise geordneter Modul ノ連續性ニ就イテ(訂正)

中野　秀五郎(東大)

此前ノ訂正ニ於テ、連續函數ヲ Schnitt ニテ擴張スルト任意ノ函數ヲ得ルト書イタガ、數日前ニ河田君カラ $x=0$ ニテ1、他ノ點ニテ0ナル函數ニツイテハ連續函數ノ Schnitt ハ出來ナイト注意サレマシタノデ、連續函數ヲ Schnitt デ擴張スルト何ニナルカ考ヘテ見マシタ。兎ニ角連續函數ノ總テハ separable デスカラ、Schnitt デ擴張シテモ亦 separable 從ツテ總テノ函數ニナラヌコトハ明デス。

$f(x)$ ヲ今連續函數ニヨル Schnitt ヨリ得ル函數トス。即チ $f(x) \leqq \varphi(x)$ ナル連續函數ノ全体ヲ A，$f(x) \geqq \psi(x)$ ナル連續函數ノ全体ヲ B トシタトキ，(A, B) ニテ Schnitt ヲ得タトスル。$f(x)$ ノ上半連續函數ヲ $\overline{f}$，下半連續函數ヲ $\underline{f}$ トスレバ，明カニ

$$\overline{f}(x) = \underset{\varphi \in A}{l.u.b.}\ \varphi(x)$$

$$\underline{f}(x) = \underset{\psi \in B}{g.l.b.}\ \psi(x)$$

然ルニ (A, B) ハ Schnitt ナルニヨリ $\varphi(x) \geqq \underline{f}(x)$ ナル $\varphi(x)$ ハ A ニ屬スル。故ニ

$$\overline{(\underline{f}(x))} = \underset{\varphi \in A}{l.u.b.}\ \varphi(x) = \overline{f}(x)$$

同様ニ $\underline{f}(x) = (\underline{\bar{f}(x)})$

ヲ得ル。此ノ如キ函数ノ *regular function* ト云フコトヽスル。逆ニ又 *regular function* ハ *Schnitt* ヲ作ルコトモ以上カラ明カデアル。

$g(x)$ ヲ *Baire* ノ *function* トスルト，多クトモ *erste Kathegorie* ノ集合ヲ除イテ $f(x) = g(x)$ ナル *regular function* $f(x)$ が存在スル。如何トナレバ *erste Kathegorie* ノ集合ヲ除イテ $g(x)$ ハ連續ナルコトが次ノ如クニシテ証明サレル。α_n ヲ *rational number* ノ全体トスレバ、適當ナル *erste Klasse* ノ集合ヲ除イタ殘リノ集合 M ニ對シテ、$f(x) > \alpha_n$，$f(x) < \alpha_n$ ナル x ノ集合が M ニテ *open* ナラシメ得ル。然ルトキハ任意ノ實數 α ニ對シ、$f(x) > \alpha$，$f(x) < \alpha$ ナル集合が共ニ M ニテ *open* トナル。即チ $f(x)$ ハ M ニテ連續デアル。x_0 ヲ任意ノ点トシ

$$\varphi(x_0) = \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) \qquad (x \in M)$$

$$\psi(x_0) = \underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \qquad (x \in M)$$

ト置ケバ，明カニ

$$\bar{\Psi}(x) = \varphi(x), \qquad \underline{\varphi}(x) = \psi(x)$$

トナル。故ニ $\varphi(x)$，$\psi(x)$ ハ共ニ *regular* デアル。

点集合 M ニ對シ、其ノ点ノミノ集合ヲ M^0，*closure* ヲ M^* ニテ表ハスコトヽスル。

$$M^{\circ *}=M^{*},\quad M^{*\circ}=M^{\circ}$$

ナルが如キ集合Mヲ *regular set* ト呼ブコトヽスル。

Mが *regular* ナルトキ，其ノ *complement* M' モ亦 *regular* トナル。

$$\left((M')^{\circ}=(M^{*})',\ (M')^{*}=(M^{\circ})'\right)$$

又 $M^{\circ *}$，$M^{*\circ}$ ハ常ニ *regular* デアル。如何トナレバ，先ヅ $M^{*\circ *}\supset M^{*\circ}$ ヨリ $M^{*\circ *\circ}\supset M^{*\circ}$，又 $M^{*\circ *}\subset M^{*}$ ヨリ $M^{*\circ *\circ}\subset M^{*\circ}$ トナルヲ以テナリ。$M^{\circ *}$ モ亦同様ナリ。

Baire ノ函数 $f(x)$ が *regular function* ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ任意ノ實數 α ニ對シ，$f(x)\geqq\alpha$ $(\leqq\alpha)$ ナル x ノ集合 M $(\overline{M})$ ニ對シ M° $(\overline{M}^{\circ})$ が *regular* ナルコトデアル。先ヅ $f(x)$ ヲ *regular* トスル。

$f(x)\geqq\alpha$ ナル x ノ全体ヲ M，$\overline{f}(x)\geqq\alpha$ ナル x ノ全体ヲ H，$\underline{f}(x)\geqq\alpha$ ナル x ノ全体ヲ K トスル。

然ルトキハ、先ヅ $M^{\circ}=K^{\circ}$ デアル。如何トナレバ $f(x)\geqq\alpha$ in M° ヨリ $\underline{f}(x)\geqq\alpha$ in M° トナリ、従ツテ $M^{\circ}\subset K^{\circ}$. 又 $f(x)\geqq\underline{f}(x)\geqq\alpha$ in K° ヨリ $K^{\circ}\subset M^{\circ}$ トナルヲ以テナリ。

次ニ $M^{*}\subset H$ ハ明カナリ。又上ト同様ノ論法デ $\underline{(\overline{f}(x))}=\underline{f}(x)$ ナルニヨリ，$H^{\circ}=K^{\circ}$ デアル。故ニ $M^{*\circ}\subset K^{\circ}=M^{\circ}$. 従ツテ $M^{*\circ}=M^{\circ}$ デアル。

故ニ M° ハ *regular* ナリ。

同様ニシテ $f(x)\leqq\alpha$ ナル x ノ全体ヲ $\widetilde{M}$ トスレバ，$\widetilde{M}^{\circ}$

ガ regular ナルコトモ証明シ得ル。

逆ニ $f(x)$ ガ以上ノ如キ性質ヲ有スル Baire ノ函數トスル。前ニ述ベタルコトニヨッテ $f(x)$ ハ erste Kathegorie ノ集合ヲ除イテ regular function $g(x)$ ト一致スル。$f(x) \geqq \alpha$ ナル x ノ全体ヲ M. $g(x) \geqq \alpha$ ナル x ノ全体ヲ N トスル。然ルトキハ M^0, N^0 ハ erste Kathegorie ノ集合ヲ除イテ一致シ、然カモ共ニ regular ナルヲ以テ、$M^0 = N^0$ ナリ。然ルトキハ、$\underline{f}(x) > \alpha$ ナル任意ノ x ハ M^0 ニ含マレ、從ッテ $\underline{g}(x) \geqq \alpha$ トナル。故ニ $\underline{f}(x) \leqq \underline{g}(x)$ ナリ。同様ニシテ $\underline{f}(x) \geqq \underline{g}(x)$ ヲ得ル。故ニ $\underline{f}(x) = \underline{g}(x)$ ナリ。又 $f(x) \leqq \alpha$, $g(x) \leqq \alpha$ ナル x ノ集合ヲ考ヘルコトニヨリ $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)$ ヲ得ル。故ニ $f(x)$ ハ regular ナリ。

以上ニヨリ，連續函數ヲ Schnitt ニテ擴張スレバ、regular function ヲ得ル。regular function ハ bounded variation ナル function ノ擴張ト考ヘラレルモ、未ダ何等ソノ性質ニ就イテハ研究セラレテヰナイ樣デアル。

Vector lattice $\mathfrak{M}$ ヲ Schnitt ニテ擴張スルニ就イテ lattice ノ條件，$a \smile b$, $a \frown c$ ノ存在ヲ假定シタガ、之レハ次ノ條件デ置換ヘラレル；

$c \geqq a, \geqq b$, $d \leqq a, \leqq b$ ナル c, d ノ存在

又，$\mathfrak{M}$ ガ Ring ナルトキハ，Schnitt ニテ擴張シタトキモ矢張リ Ring トナルコトモ此処ニ注意

シテ置ク。