

$$923. \text{ 函數方程式 } f(x+y) + f(x-y) = \frac{2f(x)g(y)}{1-k^2f^2(x)g^2(y)}$$

($1 \geq k \geq 0$) = 就イテ

春木 博(神戸高商船)

上記、函數方程式 = 於テ $k=0$ + ルトキ 即チ

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$ + ルトキハ、ソノ可
測解トシテ

$$(I) \begin{cases} f(x) = ax + b \\ g(x) \equiv 1 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} f(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x \\ g(x) = \cos \alpha x \end{cases}$$

$$(III) \begin{cases} f(x) = a \cosh \alpha x + b \sinh \alpha x \\ g(x) = \cosh \alpha x \end{cases}$$

ヲ得ルコトハ、ヨリ知ラレテキル。茲ニ a, b, α ハ 任意ノ
實數ナル。コノ場合ノ形式的一拡張トシテ

$$(F) \quad f(x+y) + f(x-y) = \frac{2f(x)g(y)}{1-k^2f^2(x)g^2(y)}$$

($1 \geq k \geq 0$)

ノ 原点ノ 近傍ニ 於ケル 連続解ヲ 求メテ 見ヨウ。コノニ 注意ス
ベキコトハ (F) = 於テ $k=0$ ノトキト $1 \geq k > 0$ ノトキト
ハ 模様ガ 少シク 違ツテ 来ルト云フコトナル。ソレハ $k=0$
ノトキハ $f(0)$ ハ 不定ナルガ $1 \geq k > 0$ ノトキハ 常數解ヲ
除ケバ $f(0) = 0$ トナルトイフ点ニアル。

(F) = 於テ $x=0, y=0$ トオケバ ($f(0) = a, g(0) = b$)

$$a=0 \quad \text{又ハ} \quad 1-a^2 k^2 = b$$

$a=0$ ノトキハ (F) = 於テ $y=0$ トオクコト = ヨリ $f(x) \neq 0$ ナラバ $b=0$ ヲ得ル。

$1-a^2 k^2 = b$ ナルトキハ (F) = 於テ $y=0$ トオケバ

$$f(x) \{1 - a^2 k^2 f^2(x)\} = b f(x)$$

今 $a \neq 0$ ノトキ即チ $f(0) \neq 0$ ナリ、シカモ $f(x)$ ハ連続ナル故、原点ノ適當ノ近傍ナリ

$$1 - a^2 k^2 f^2(x) = b$$

ガ成立スル。

$$k \neq 0 \quad \text{ナル故} \quad f^2(x) = \frac{1-b}{a^2 k^2} = a^2$$

$$f(0) = a \quad \text{ナル故} \quad f(x) \equiv a$$

故ニ $f(x)$ ハ常數トナル。故ニ常數解ヲ除ケバ $f(0) = 0$, $\varphi(0) = 1$ ナリ。之ヨリ $f(-x) = -f(x)$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$ ナルコトハ容易ニ判ル。

次ニ積分ヲ用ヒルコトニヨリ、(F) ヨリ $f(x)$, $\varphi(x)$ ガ連続ナラバ微分可能ナルコトヲ証明シ得ル。

(F) ヲ x = 関シテ微分シテ

$$f'(x+y) + f'(x-y) = 2\varphi(y) \frac{f'(x) + k^2 f^2(x) f'(x) f^2(y)}{\{1 - k^2 f^2(x) f^2(y)\}^2}$$

$x=0$ トオケバ $f'(y) = f'(-y)$, $f(0) = 0$ ナル故

$$\varphi(y) f'(0) = f'(y)$$

$f'(0) = \alpha$ トオケバ $f(x)$ ガ恒等的ニ常數トナル以外ハ

$\lambda \neq 0$ ナルコトガ上式ヨリ判ルカラ $\varphi(x) = \frac{1}{\lambda} f'(x)$
 之ヲ (F) へ代入スレバ

$$(1) \quad f(x+y) + f(x-y) = \frac{2f(x)f'(y)}{\lambda \{1 - k^2 f^2(x)f^2(y)\}}$$

(1) = 於テ x ト y トヲイレカヘレバ $f(y-x) = -f(x-y)$
 ナル故

$$(2) \quad f(x+y) - f(x-y) = \frac{2f(y)f'(x)}{\lambda \{1 - k^2 f^2(x)f^2(y)\}}$$

(1) + (2) ヲ作レバ

$$f(x+y) = \frac{f(x)f'(y) + f(y)f'(x)}{\lambda \{1 - k^2 f^2(x)f^2(y)\}}$$

$f(x)$ ハ何回デモ微分可能ナルコトハ (1) カラ証明シ得ルカ
 ラ。上式ヲ $y = 0$ 関シテニ度微分シ $y = 0$ トオケバ, 結局
 $(\beta = f'''(0))$

$$\lambda f''(x) = 2\lambda^3 k^2 f^3(x) + \beta f(x)$$

$f'(x)$ ヲ両辺ニカケテ積分スルコトニヨリ結局

$$f'^2(x) = \lambda^2 k^2 f^4(x) + \frac{\beta}{\lambda} f^2(x) + \lambda^2$$

之レヲ解イテ結局

$$(I) \quad \begin{cases} f(x) = \lambda \operatorname{dn}[\lambda x; \lambda^2 k] \\ \varphi(x) = c \operatorname{cn}[\lambda x; \lambda^2 k] \operatorname{dn}[\lambda x; \lambda^2 k] \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} f(x) = \lambda \operatorname{tn}[\lambda x; \sqrt{1 - \lambda^4 k^2}] \\ \varphi(x) = \frac{\operatorname{dn}[\lambda x; \sqrt{1 - \lambda^4 k^2}]}{c \operatorname{cn}[\lambda x; \sqrt{1 - \lambda^4 k^2}]} \end{cases}$$

$$(III) \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} t n dx dn dx \quad (\text{常数 } k \text{ 任意}) \\ g(x) = \frac{dn^2 dx}{cn^2 dx} - k^2 dn^2 dx \end{cases}$$

α は任意の實數, λ は $|\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ なる實數 k は $1 \geq k \geq 0$ なる實數とする。

—— (完) ——