922. イデヤル論ノ基本定理ニ就イテノ注意

東大代數談話會

單位元ヲ持ツ Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ デ，任意ノ Ideal $\mathfrak{a}$（$\mathfrak{o}$ 及ビ 0-ideal ハ除ク）ガ Primideal ノ積トシテ eindeutig ニ表ハサレルタメノ十分條件トシテ，次ノ三ツノ條件ガヨク知ラレテヰル。

(1) $\mathfrak{o}$ ノ Ideal ニ就イテ Teilerkettensatz ガ成立ツ。

(2) Primideal ハ maximal デアル。

(3) $\mathfrak{o}$ ハソノ Quotientenkörper デ ganz abgeschlossen デアル。

之ノ時ハ次ノ (4) ガ又成リ立ツ。

(4) $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{e_1}\cdots\cdots\mathfrak{p}_n^{e_n}$, $\mathfrak{b}=\mathfrak{p}_1^{f_1}\cdots\cdots\mathfrak{p}_n^{f_n}$ $(e_i, f_i \geqq 0)$

トスルトキ，$\mathfrak{a}\supset\mathfrak{b}$ ナルタメノ必要十分條件ハ $e_i \leqq f_i$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ ナルコトデアル。

逆ニ van der Waerden ノ Moderne Algebra II デ任意ノ Ideal ガ Primideal ノ積トシテ一義ニ表ハ

サレ，且ツ (4) ガ成立ツナラバ (1), (2), (3) ノ條件ガ必要デアルコトヲ証明シテヰル。

然シ (4) ノ條件ナシニ (1), (2), (3) ガ必要ナルコトヲ最近久保氏ガ証明サレ (Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen，廣島文理大紀要十巻)，更ニ今春ノ数物年會デ小林氏ガ簡單ナ証明ヲ與ヘラレタ。

(但シ遥カニ一般ノ場合ガ取扱ハレテヰル。)

更ニ素イデヤルヘノ分解ノ一義性ヲ假定シナイデモ (allgemeine Z. P. I. — Integritätsbereich) (1), (2), (3) ガ必要ニナルコトハ，森氏ノ論文 (Allgemeine Z. P. I. — Ringe，廣島文理大紀要十巻) デ異ッタ形デモット一般ノ場合カラ証明サレテヰル。

此処デハ小林氏ノ方法ノ紹介傍々，コノ簡單ナ証明ヲ與ヘテ見ヨウ。

定理『 $\mathfrak{O}$ ヲ單位元ノアル整域トスル。 $\mathfrak{O}$ ノ任意ノイデヤル $\mathfrak{a}$ ($\neq \mathfrak{O}, \mathfrak{u}$) ガ素イデヤルノ積トシテ表ハサレルタメニハ，(表ハシ方ノ一義性ヲ假定シナイデモ), (1), (2), (3) ノ條件ハ必要デアル。』

(証明)

(i) 先ヅ小林氏ノ方法ヲ一部分紹介スル。$\mathfrak{p}$ ヲ任意ノ素イデヤルトシ，$a \notin \mathfrak{p}$ ヲトル。

(5) $(\mathfrak{p}, a)^2 = (\mathfrak{p}, a^2)$

ヲ証明スル。 $(\mathfrak{p}, a) = \mathfrak{p}_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}_m$, $(\mathfrak{p}, a^2) = \mathfrak{p}'_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}'_m$ ト

スレバ，$\mathfrak{p} \subset (\mathfrak{p}, a)$ カラ $\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_m$ ハスベテ $\mathfrak{p}$ ヲ含ム。
$\mathfrak{p}'_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}'_m$ モ同様。

$$(\mathfrak{p}, a)^2 = \mathfrak{p}_1^2 \cdots\cdots \mathfrak{p}_m^2, \quad (\mathfrak{p}, a^2) = \mathfrak{p}'_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}'_n$$

デ共通ナ部分 $\mathfrak{c}$ ヲマトメテ

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathfrak{p}, a)^2 = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}, & \mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cdots\cdots \mathfrak{q}_r \\ (\mathfrak{p}, a^2) = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}, & \mathfrak{b} = \mathfrak{q}'_1 \cdots\cdots \mathfrak{q}'_s \end{array}\right)$$

$$\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}'_j \quad (i=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,s)$$

トスル。$\mathfrak{o}$ カラ $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ヘ移レバ，$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i, \cdots\cdots, \mathfrak{p}$ ヲ含ムカラ，$\bar{\mathfrak{p}}_i$; etc. ハ $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ノ素イデヤルトナリ，又 $\overline{\mathfrak{p}_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}_n} = \bar{\mathfrak{p}}_1 \cdots\cdots \bar{\mathfrak{p}}_n$ 等成立スル。（コヽニ ― ハ mod. $\mathfrak{p}$ ノクラスヲトルコトヲ意味スル。）

$$\left.\begin{array}{l} \overline{(\mathfrak{p}, a)^2} = \left(\overline{(\mathfrak{p}, a)}\right)^2 = (\bar{a})^2 = (\bar{a}^2) = \bar{\mathfrak{c}}\cdot\bar{\mathfrak{a}} \\ \overline{(\mathfrak{p}, a^2)} = (\bar{a}^2) = \bar{\mathfrak{c}}\cdot\bar{\mathfrak{b}} \end{array}\right)$$

カラ $\bar{\mathfrak{c}}\cdot\bar{\mathfrak{a}}\cdot\bar{\mathfrak{b}} = (\bar{a}^2)\bar{\mathfrak{a}} = (\bar{a}^2)\bar{\mathfrak{b}}$，即チ $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{b}}$ トナル。

$\mathfrak{q}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{q}_r, \mathfrak{q}'_1, \cdots\cdots, \mathfrak{q}'_s$ ガ全然ナケレバ (5) ハ既ニ成立スルカラ，例ヘバ $r \geqq 1$ トシテ矛盾ニ導カウ。
$\bar{\mathfrak{q}}_1, \cdots\cdots, \bar{\mathfrak{q}}_r$ 中ノ Min ナ一ツヲ例ヘバ $\bar{\mathfrak{q}}_1$ トスル。

$$\bar{\mathfrak{q}}_1 \supset \bar{\mathfrak{q}}_1 \cdots\cdots \bar{\mathfrak{q}}_r = \bar{\mathfrak{q}}'_1 \cdots\cdots \bar{\mathfrak{q}}'_s$$

カラ $\bar{\mathfrak{q}}_1 \supset \bar{\mathfrak{q}}'_i$ トナル。同様ニ $\bar{\mathfrak{q}}'_i \supset \bar{\mathfrak{q}}_j$。即 $\bar{\mathfrak{q}}_1 \supset \bar{\mathfrak{q}}'_i \supset \bar{\mathfrak{q}}_j$。

$\bar{\mathfrak{q}}_1$ ノ Min カラ $j=1$ トナリ，$\bar{\mathfrak{q}}_1 = \bar{\mathfrak{q}}'_i$ トナル。$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}'_i \supset \mathfrak{p}$ カラ，$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}'_i$ トナリ，假定ニ反スル。即チ (5) ガ成立スル。

次ニ (5) カラ

(6) $\mathfrak{p}\cdot(\mathfrak{p}, a) = \mathfrak{p}$

ヲ証明スル. 先ヅ $(\mathfrak{p}, a^2) = (\mathfrak{p}, a)^2 = (\mathfrak{p}^2, a\mathfrak{p}, a^2)$ カラ $\pi \in \mathfrak{p}$ ハ

$$\pi = \pi_1 + \xi a^2 \quad (\pi_1 \in (\mathfrak{p}^2, a\mathfrak{p}))$$

トナリ, $\xi a^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p})$ トナル。$a \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ カラ $\xi a \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ トナリ, 之レハ $\mathfrak{p} \subset (\mathfrak{p}^2, a\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}(a, \mathfrak{p})$ ヲ示ス。即チ (6) トナル。

(iii) 之レカラ先キハ最早簡單デアル。

(イ) スベテノ素イデヤル $\mathfrak{p}$ ハ maximal デアル。

何トナレバ $\mathfrak{p} \ni \pi$ ヲトリ, $(\pi) = \mathfrak{p}_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}_n$ ト分解スル。$\mathfrak{p} \supset (\pi)$ カラ例ヘバ $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1$ トナル。$\mathfrak{p}$ ガ maximal デナイトスレバ $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p}_0 \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{p})$ ヲトリ, $\mathfrak{p}_0 \ni a$, $\mathfrak{p}_1 \not\ni a$ ヲトル。(6) ヨリ

$$\mathfrak{p}_1(\mathfrak{p}_1, a) = \mathfrak{p}_1$$

兩辺ニ $\mathfrak{p}_2 \cdots\cdots \mathfrak{p}_n$ ヲ掛ケレバ, $(\pi)(\mathfrak{p}, a) = (\pi)$, 即チ $(\mathfrak{p}_1, a) = \mathfrak{o}$ トナル。

之レハ $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{p}_0 \supset (\mathfrak{p}_1, a)$ ト矛盾スル。即 $\mathfrak{p}$ ハ maximal デアル。

(ロ) 次ニ $\mathfrak{p}^{-1}\cdot\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ ガ成立スル。

何トナレバ, $\pi \in \mathfrak{p}$ ヲトリ $(\pi) = \mathfrak{p}_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}_n$ トスレバ, 例ヘバ $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1$ トナルガ, (イ) カラ $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ トナル。コゝデ $\mathfrak{a} = \frac{1}{\pi}\mathfrak{p}_2 \cdots\cdots \mathfrak{p}_n$ ナル分數イデヤルヲ考ヘレバ

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{p}^{-1}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$$

デアルカラ $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{p}^{-1}\cdot\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ トナル。即チ $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{o}$

(ハ) $\mathfrak{o}$ ノイデヤル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ夫々 $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1}\cdots\cdots\mathfrak{p}_n^{e_n}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1^{f_1}\cdots\cdots\mathfrak{p}_n^{f_n}$ ($e_i, f_i \geqq 0$) ト表ハサレルトキニ, $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ ナレバ $e_i \leqq f_i$ ($i=1,\cdots,n$) トナル。何トナレバ例ヘバ $e_1 > f_1$ トスレバ, 順次ニ $\mathfrak{p}_1^{-1}$ ヲ f_1 回 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ニ乗ズレバ

$$\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_1^{e_1-f_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdots\cdots\mathfrak{p}_n^{e_n} \supset \mathfrak{p}_2^{f_2}\cdots\cdots\mathfrak{p}_n^{f_n}$$

トナリ, $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_i$ ($i \neq 1$) デナケレバナラヌ。コレハ (イ) ニ矛盾スル。

(ニ) $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_n$ トスル表ハシ方ハ一義ニ定マル。

証明ハ (ハ) ト同様。

(ハ), (ニ) ガアルカラ, 後ハ Moderne Alg. II ニツヾケレバヨイ。(証明完)

16. 4. 23 (河田)