921. 可換ナRadikalヲ持ツLie環(I)

安倍　亮(東大)

準單純ナLie環ニツイテハCartan以来カナリ精シイコトが知ラレテヰル。準單純デナイLie環，即チRadikalノアルLie環ニツイテ知ラレテヰル一般ナ定理ハ先ヅ

「Leviノ定理．標數0ノ基礎体PノLie環ヲ$\mathfrak{R}$，ソノRadikal 即チ最大可解Ideal)ヲ$\mathfrak{r}$トセバ

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{s} \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{r}$$

ナル如キ準單純部分環$\mathfrak{s}$ガアル」

ダケデアラウ。RadikalノアルLie環ニツイテ，之レ以上ニモウ少シ立入ッテ考ヘテ見ヨウト思ヘバ，先ヅ一番簡單ナノハRadikalが可換，即チ$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \circ \mathfrak{r} = 0$ ノ場合デアル。コノ様ナLie環トシテドンナモノがアルカハ，單純環ノ分類ト(準單純環ノ)總ベテノ既約表現ノ知識[1]トカラ完全ニ答ヘラレル事ハ，Leviノ定理ヲ使ヘバ容易ニ分ル。

1) 準單純環ノ總テノ既約表現ハ，少クトモ基礎体が代數的閉体ノトキニハ後ニ述ベル様ニ，其ノ單純成分ノ總テノ既約表現が分レバ，ソレカラ分ル。併シ基礎体が一般ダトハッキリ分ラナイ。即チ單純環ノ既約表現がワカレバイイト云ヒ切ルコトが出来ナイ。ソコデ括弧シテ(準單純環ノ)ト附加ヘタノデアル。

次ニ Levi ノ分解 $\mathfrak{R}=\mathfrak{s}+\mathfrak{r}$ ニ於テ $\mathfrak{s}$ ハ一般ニ一意的デハナイガ，然ラバ $\mathfrak{s}$ トシテドンナ部分環ガ出テ来ルカゞ問題ニナル。少クトモ $\mathfrak{r}'=0$ ノ場合ニハ $\mathfrak{R}=\mathfrak{s}+\mathfrak{r}$, $\mathfrak{R}=\mathfrak{s}_1+\mathfrak{r}$ ナル二ツノ分解ガアレバ，$\mathfrak{s}$ ヲ $\mathfrak{s}_1$ ニ持ッテ行ク $\mathfrak{R}$ ノ Automorphismus ガアルコトハ容易ニ分ル。従ッテコノ場合ニハ，Levi ノ分解ハ Isomorphie ヲ除イテ一意的デアル。

更ニコノ問題ヲ推シ進メテ $\mathfrak{R}$ ノスベテノ Automorphismus ヲ決定スルコトガ出来ル。コノトキ準単純環ノ Automorphismus ト表現トノ関係ニツイテ興味アル問題ガ出テ来ル。即チ $\mathfrak{s}$ ノ Automorphismus $S\to S^A$ ト $\mathfrak{s}$ ノ表現 $S\to\mathfrak{D}(S)$ ガアルトキ，表現 $S\to\mathfrak{D}(S^A)$ ハドウナルカト云フコト，特ニ二ツノ表現 $\mathfrak{D}(S)$ ト $\mathfrak{D}(S^A)$ ガ同値ニナル條件等。

之等ノ事ニツイテ考ヘテ見タイ。

1. 可換ナ Radikal ヲ持ツ Lie 環ノ構造

基礎体 P ハ今後断ラナクテモ標数 0 ノ体トスル。具体的ナ問題デハ，P ヲ代数的閉体，或ハ更ニ複素数体トシナケレバナラナイコトモアルガ，一般ニハ標数 0 ノ任意ノ体トシテオク。

$\mathfrak{R}$ ヲ P ノ上ノ Lie 環，ソノ Radikal $\mathfrak{r}$ ハ今後常ニ可換ナモノトスル。即チ

$$\mathfrak{r}'=\mathfrak{r}\circ\mathfrak{r}=0$$

Levi ノ定理ニヨリ

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{v}$$

ナル準単純部分環 $\mathfrak{r}$ ガアル。$\mathfrak{r} = (u_1, \cdots\cdots, u_r)$, $\mathfrak{v} = (v_1, \cdots\cdots, v_g)$ トスレバ $\mathfrak{R}$ ノ構造ヲ與ヘル式ハ

(1.1) $u_i \circ u_j = u_k c_{ij}^k, \quad v_\alpha \circ v_\beta = 0,$

$u_i \circ v_\alpha = v_\beta d_{i\alpha}^\beta;$

$c_{ij}^k, d_{i\alpha}^\beta \in P;\ i, j, k = 1, \cdots\cdots, r;\ \alpha, \beta = 1, \cdots\cdots, g.$[2)]

(1.2) $D_i = [d_{i\alpha}^\beta]$ ($d_{i\alpha}^\beta$ ハ β 行 α 列ノ元)

ナル g 行 g 列ノ Matrix ヲトレバ, $u_i\alpha^i \longrightarrow D_i\alpha^i$ ハ $\mathfrak{v}$ ヲ表現加群トスル $\mathfrak{r}$ ノ表現デアル。$\mathfrak{v}$ ガ可換ダカラ, $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ノ表現ト考ヘルコトモ出来ル。

逆ニ $\mathfrak{r} = (u_1, \cdots\cdots, u_r)$ ヲ任意ノ準単純 Lie 環 (1.1) ノ最初ノ式ヲソノ構造, $\vartheta:\ u_i \longrightarrow [d_{i\alpha}^\beta]$ ヲ其ノ一ツノ表現トスレバ, (1.1) デ構造ヲ定義スルコトニヨリ, 可換ナ Radikal ヲ有スル Lie 環 $\mathfrak{R} = (u_1, \cdots\cdots, u_r; v_1, \cdots\cdots, v_g)$ ガ出来ル。之レヲ $\mathfrak{R}(\mathfrak{r}; \vartheta)$ ト書クコトニシヨウ。

$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{r}; \vartheta)$ ト $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}(\mathfrak{r}_1; \vartheta_1)$ トハ $\mathfrak{r} \cong \mathfrak{r}_1$ デ且ツ ($\mathfrak{r} \cong \mathfrak{r}_1$ ニ基キ $\mathfrak{r}$ ト $\mathfrak{r}_1$ ヲ適當ニ identifizieren シ

---

2) 今後ローマ字ノ Index ハ常ニ u ノ Index, ギリシア字ノ Index ハ常ニ v ノ Index ヲ表ハスモノトスル。二度アラハレル Index ハローマ字デアルカギリシャ字デアルカニ從ヒ夫々 $1, \cdots\cdots, r$ 又ハ $1, \cdots\cdots, g$ ヲ動カシテ加ヘ合セルモノトスル。

タトキノ$\mathfrak{d}$ト$\mathfrak{d}_1$ガ同値ナラバ，$\mathfrak{f}$-Modul $\mathfrak{R}$ト$\mathfrak{f}_1$-Modul $\mathfrak{R}_1$ガ$\mathfrak{f}\longleftrightarrow\mathfrak{f}_1$ー作用同型ニ對應スルカラ，同型デアル。

$\mathfrak{f}=\mathfrak{f}_1$ナルトキ即チ$\mathfrak{R}(\mathfrak{f};\mathfrak{d})$ト$\mathfrak{R}(\mathfrak{f};\mathfrak{d}_1)$トガ同型ナルタメニハ然シ$\mathfrak{d}$ト$\mathfrak{d}_1$ハ必ズシモ同値デナクテモヨイ，即チAヲ$\mathfrak{f}$ノアル自己同型トシテ$\mathfrak{R}$ノ$\mathfrak{f}$ト$\mathfrak{R}_1$ノ$\mathfrak{f}$トヲ$S^A\longleftrightarrow S$ニ從ッテ對應サセタトキ，表現$S\rightarrow\mathfrak{d}(S^A)=\mathfrak{d}^A(S)$ト$S\rightarrow\mathfrak{d}_1(S)$ガ同値ナラバ，$\mathfrak{R}$ト$\mathfrak{R}_1$ハ同型デアル。ソコデ自ラ次ノ定義ニ導カレル：

定義. $\mathfrak{A}$ヲ Lie 環（又ハ群，algebra 等）$\mathfrak{f}$ノ Automorphismen ノ一ツノ群トスル．$\mathfrak{f}$ノ二ツノ表現$\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ニ對シ

$$\mathfrak{d}^A\sim\mathfrak{d}_1$$

ナル$\mathfrak{A}$ノ Automorphismus A ガアルナラバ，即チ

$$\mathfrak{d}(S^A)=L^{-1}\mathfrak{d}_1(S)L,\quad S\in\mathfrak{f}$$

ナルAト$|L|\neq 0$ナル行列Lガアルナラバ，$\mathfrak{d}$ト$\mathfrak{d}_1$トハ$\mathfrak{A}$-äquivalent デアルト云フ。[3)]

コノ定義ニヨレバ，(A)ヲ$\mathfrak{f}$ノ Automorphismen 全体

---

3) $\mathfrak{f}$ガ群又ハ algebra ノ時，ソノ内部同型ノ群ヲ$\mathfrak{J}$トスレバ，表現ノ$\mathfrak{J}$-äquivalenz ハ普通ノ äquivalenz ト一致スル。$\mathfrak{f}$ガ実数体又ハ複素数体ノ上ノ Lie 環ナル時モ所謂「内部同型」ノ群ニ就テ同ジ事ガ云ヘル。コノ事ハ後ニ述ベル。

又 GL(n, P) ノ既約表現中互ニ kontragredient ナ二ツハ，一般ニ同値デハナイガ (A)-äquivalent デアル。之モ後ニ述ベル。

ノ群トスルトキ, $\mathfrak{R}(\mathfrak{g};\mathfrak{d}) \cong \mathfrak{R}(\mathfrak{g};\mathfrak{d}_1)$ ナルタメニハ $\mathfrak{g}$ ノ表現 $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1$ ハ(A)-*äquivalent* デアレバヨイ。故ニ

定理〔1.1〕 可換ナ *Radikal* ヲモツ P ノ上ノスベテノ *Lie* 環ヲ求メルコトハ

i) P ノ上ノ総テノ準単純環ノ決定。

ii) P ノ上ノ各準単純環 $\mathfrak{g}$ ノ P ニ於ケル総テノ表現(類)ノ決定。

iii) $\mathfrak{g}$ ノ P ニ於ケル表現全体ヲ(A)-*äquivalent* ナモノノ類ニ分ケル事.

ノ三ツニ帰着スル。

i)ニ就テ。 P ノ上ノ準単純環ハ P ノ上ノ単純環ノ直和デアル。従ッテ単純環ノ分類ヲスレバヨイ。周知ノ通リ之レハ P ガ代数的閉体若クハ実閉体ノトキハ完全ニ(*Killing-Cartan*), 其他ノ場合モ大部分(*Landherr-Jacobson*)数ヘ上ゲラレテ居ル。

ii)ニ就テ. 準単純環ノ表現ハ完全可約デアル。従ッテ既約表現ガ全部分レバヨイ。[4)] P ガ代数的閉体ノトキハ,

---

4) 特ニ $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{R}$ ノ *minimal* ナ *Ideal* ナラ, $\mathfrak{d}$ ハ始メカラ既約デアル. コノヤウナ *Radikal* ヲ持ツ *Lie* 環ヲ考ヘルコトニヨッテ, 準単純環ノ既約表現ヲ論ズルコトガ出来ル。*Cartan* ノ *Thèse* ノ既約表現ヲ論ジタ第八章ノ題ガ"*groupes n'admettant qu'un sous-groupe invariant intégrable*"トナッテ居ルノハコノ故デアル。

單純環ノ既約表現ニ歸着スル。何トナレバ

「$\mathfrak{g}$ ヲ單純環 $\mathfrak{g}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{g}_s$ ノ直和, $\vartheta_1, \cdots\cdots, \vartheta_s$ ヲ夫々 $\mathfrak{g}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{g}_s$ ノ既約表現トスレバ, $\vartheta_1, \cdots\cdots, \vartheta_s$ ノ直積ナル $\mathfrak{g}$ ノ表現 ϑ ハ既約, 逆ニ $\mathfrak{g}$ ノ既約表現ハ総テ此形ニナル。但 P ハ代數的閉」

(爰ニ, 例ヘバ $\mathfrak{g}_1$ ノ g 次ノ表現 ϑ_1 ト, $\mathfrak{g}_2$ ノ h 次ノ表現 ϑ_2 ノ直積トハ $S_1 + S_2 \longrightarrow \vartheta_1(S_1) \times E_h + E_g \times \vartheta_2(S_2)$ $S_i \in \mathfrak{g}_i$ ($\times$ 一号ハ *Kronecker-Produkt*) ナル gh 次ノ表現ノ事, 即チ無限小演算子的ニ作ツタ積表現ノ事デアル。証明ハ略ス)

代數的閉体ノ場合ノ單純環ノ既約表現ハ之亦 Cartan ガ完全ニ求メテ居ル。[5] 從ツテ ii) モ完全ニ解カレテヰル譯デアル。

P ガ一般ノ場合デモ

「P ノ上ノ *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ ノ P ニ於ケル既約表現ハ, K⊃P ナル或ル K ニ於ケル $\mathfrak{g}$ ノアル絶對既約表現ニ於テ行列ノ K ノ *Element* ヲ K/P ノ正規表現デ置キカヘテ得ラレル表現ト同値デアル。」[6]

---

5) Cartan: *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, Ann. École Norm. Sup. 31 (1914)

6) E. Bannow. *Die Automorphismengruppen der Cayley-Zahlen*, Abh. Math. Sem. Hamburg 13 (1940), 250 頁参照。

但証明ハシテナイ。此定理及其逆定理ニ就テハ別ノ機會ニ述ベタイ。

P^* ヲ P ノ上ノ代数的閉体トスレバ，$\mathfrak{g}$ ノ K ニオケル絶對既約表現 $\mathfrak{D}$ ヲ $\mathfrak{g}_{P^*}$ ノ P^* ニオケル既約表現 $\mathfrak{D}^*$ ニ拡張デキル。$\mathfrak{D}^*$ ハ既述ノ如リ，完全ニ分ッテ居ル．之カラ逆ニ $\mathfrak{D}$ トシテドノ様ナモノが有リ得ルカヲ求メルノハ，P^* ノ上ノ単純環ヲ全部知ッテ，之カラ P ノ上ノ単純環ヲ全部求メルノト略々同様ナ問題デアルが，更ニ難カシイダラウト思フ。[7)]

iii) ニツイテハ第四節ニ述ベル。之レモ P が複素數体ノ場合ハ完全ニ分ル。

Radikal $\mathfrak{w}$ ヲ $\mathfrak{g}$-Modul トシテ既約ナ Modul ノ直和ニ分ケ，其ノ中零表現ヲ vermitteln シナイモノノ直和ヲ $\mathfrak{w}_1$，零表現ニ相當スルモノノ直和ヲ $\mathfrak{w}_2$ トスル。$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2$．$\mathfrak{w}_2 = \mathfrak{z}$ ハ明カニ $\mathfrak{R}$ ノ Zentrum ニ他ナラナイ。

(Zentrum ヲ $\mathfrak{z}$ トセバ，$\mathfrak{g} \circ \mathfrak{w}_2 = 0$，$\mathfrak{w} \circ \mathfrak{w}_2 = 0$ ヨリ $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{w}_2 = 0$　$\therefore \mathfrak{w}_2 \subset \mathfrak{z}$. 逆ニ $\mathfrak{z}$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ可解 Ideal ダカラ $\subset \mathfrak{w}$，而モ $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{z} = 0$ ダカラ $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{w}_2$，$\therefore \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{z}$)　コノトキ $\mathfrak{g} + \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{R}_1$ モ Ideal デアッテ，從ッテ $\mathfrak{R} = \mathfrak{z} + \mathfrak{R}_1$ ハ Ideal ノ直和デアル。又 $\mathfrak{g}$ ノ $\mathfrak{w}_1$ ニオケル表現ハ零表現ヲ含マナイカラ $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_1$

(証明：$\mathfrak{w}_1 = \sum \mathfrak{m}_i$ ヲ既約ナ $\mathfrak{g}$-Modul ヘノ分解トスル。零表現がナイカラ $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{m}_i \neq 0$，之ハ $\mathfrak{m}_i$ ノ zulässig ナ Teilmodul デ，且ツ $\mathfrak{m}_i$ ハ既約ダカラ $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_i$,

7) P が実數ノ場合ハ Cartan が完全ニ決定シテ居ル。

$\therefore\ \mathfrak{f}\circ\mathfrak{r}_1 = \sum \mathfrak{f}\circ m_i = \sum m_i = \mathfrak{r}_1$, q.e.d.)

故ニ $\mathfrak{f}\circ\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ ヲ考ヘ合セルト

$$\mathfrak{R}_1\circ\mathfrak{R}_1 = (\mathfrak{r}_1+\mathfrak{f})\circ(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{f}) \supset \mathfrak{f}\circ\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{f}\circ\mathfrak{f}$$
$$= \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{f} = \mathfrak{R}_1$$

ヨリ

$$\mathfrak{R}_1\circ\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1$$

即チ $\mathfrak{R}_1$ ハ vollkommen デアル。又

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}\circ\mathfrak{R} = (\mathfrak{z}+\mathfrak{R}_1)\circ(\mathfrak{z}+\mathfrak{R}_1) = \mathfrak{R}_1\circ\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1$$

ヨリ $\mathfrak{R}_1$ ハ $\mathfrak{R}_1$ ableitung ニ他ナラナイコトガ分ル。

以上ヲ纒メテ

定理[1・2] 可換ナ Radikal ヲ持ツ Lie 環 $\mathfrak{R}$ ハソノ Zentrum $\mathfrak{z}$ ト ableitung $\mathfrak{R}'$ トノ直和デアル.(Ideal ノ直和!):

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{z} + \mathfrak{R}',\quad \mathfrak{z}\circ\mathfrak{z} = 0,\quad \mathfrak{z}\circ\mathfrak{R}' = 0.$$

$\mathfrak{R}'$ ハ vollkommen 即チ $\mathfrak{R}'\circ\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'$, 又 $\mathfrak{R}'$ ノ Zentrum ハ (0), 從ッテ $\mathfrak{R}'$ ノ Radikal ヲ $\mathfrak{r}_1$ トスレバ $\mathfrak{R}'/\mathfrak{r}_1$ ノ $\mathfrak{r}_1$ ニ生ズル表現ハ零表現ヲ含マナイ。

系. $\mathfrak{R}$ ガ可換ナ Radikal ヲ持ツ Lie 環ナルトキ,

i) $\mathfrak{R}$ ノ Zentrum $=(0)$ ナル事.

ii) $\mathfrak{R}$ ガ vollkommen ナル事, 即チ $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}\circ\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$

iii) $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{f};\vartheta)$, ϑ ガ零表現ヲ含マヌ事。

之等ハ同値デアル。

$\mathfrak{z}$ ハ可換ナ Lie 環ダカラ極メテ簡単デアル。essential

ナノハ $\mathfrak{R}'$ デ之ハ上ノ系ノ i) ii) iii) ヲ満足シテ居ル。

2. 可換ナ Radikal ヲ持ツ Lie 環ノ自己同型

$\mathfrak{R}$ ノ Automorphismus A ヲ考ヘヨウ。A ハ $\mathfrak{R}$ ノ Ableitung $\mathfrak{R}'$ ヲモ Zentrum $\mathfrak{z}$ ヲモ自分自身ニウツスカラ，$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}'+\mathfrak{z}$ ノ autom. A ハ $\mathfrak{R}'$ ノ勝手ナ autom. ト $\mathfrak{z}$ ノ勝手ナ autom. ヲ組合セタモノニ過ギナイ。而モ $\mathfrak{z}$ ノ autom. ハ全然勝手ナ（non-singular ナ）一次変換デアッテ問題ニナラナイカラ，$\mathfrak{R}'$ ノ autom. サヘ考ヘレバヨイ。従ッテ $\mathfrak{R}'$ ノ代リニ $\mathfrak{R}$ ト書キ，$\mathfrak{R}$ ハ始メカラ前節系ノ條件ヲ満シ，$\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ノ $\mathfrak{v}$ ニ於ケル表現ハ零表現ヲ含マナイモノトシテ差支ヘナイ。

扨テ $\mathfrak{R}$ ノ autom. A ハ Radikal $\mathfrak{v}$ ヲ invariant ニスルカラ，之ハ $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}\ (\cong\mathfrak{f})$ ノ autom. $\bar{A}$ ヲ生ズル。A ノ全体ノ群 (A) ノ中デ $\bar{A}^0=E$（恒等変換）ナル A^0 ノ全体 (A^0) ハ Normalteiler ヲナシ，

$$(A)/(A^0)\cong(\bar{A})$$

$\bar{A}$ ノ全体ノ作ル群 $(\bar{A})$ ハ $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ノ autom. ノ群デアルガ，後ニ述ベル様ニ $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ノ autom. 全体ノ群デアルカドウカハ分ラナイ。

(1) Automorphismus A^0.

A^0 ニ對シテハ $\bar{A}^0=E$，即チ $A^0u_i\equiv u_i\ (\mathfrak{v})$ 又 $A^0\mathfrak{v}=\mathfrak{v}$ ダカラ，A^0 ハ次ノ様ナ形ニナル：

(2.1) A^0: $A^0u_i=u_i^*=u_i+v_\alpha t_i^\alpha$, $A^0v_\alpha=$

$v_\alpha^* = v_\beta s_\alpha^\beta$. A^0 ハ autom デアルカラ u_i^* ニ對シテモ

$$u_i^* \circ u_j^* = u_k^* c_{ij}^k$$

デナケレバナラナイ。(1.1) ト (2.1) ヲ使ツテ精シク書ケバ

$$u_k c_{ij}^k + v_\beta d_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha - v_\beta d_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha = u_k c_{ij}^k + v_\beta t_k^\beta c_{ij}^k,$$

即チ

$$d_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha - d_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha = t_k^\beta c_{ij}^k,$$

式ハ纏メテ書クトtハ

$$(2.2) \quad D_i t_j - D_j t_i = t_k c_{ij}^k, \qquad t_i = \begin{bmatrix} t_i^1 \\ \vdots \\ t_i^g \end{bmatrix}$$

ノ解デアル。$u_i^* \circ v_\alpha = u_i \circ v_\alpha$ デアルカラ，コノ t ヲ用ヒテ作ル。

(2.3) A^{00}: $A^{00} u_i = u_i + v_\alpha t_i^\alpha$, $A^{00} v_i = v_i$

モ $\mathfrak{R}$ ノ autom. デアル。A^{00} ノ全体 (A^{00}) ハ $\mathfrak{R}$ ノ元ヲ elementweise ニ不変ナラシメル (A^0) ノ autom. 全体ノ群デアツテ，容易ニ分ル様ニ (A) ノ normalteiler ヲナス。

ソレハ (2.2) ノ解ノ空間ト isomorph ナ Vektorgruppe ヲナシテ居ル。(2.2) ノ解トシテハ少クトモ

(2.4) $\quad t_i = D_i w, \quad w = \begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^g \end{bmatrix}$

ガアル。但シwハ任意ノVektorデアル。之レガ解ナルコトハ，$u_i \longrightarrow D_i$ガ表現デアッテ$D_i D_j - D_j D_i = D_k C^k_{ij}$ヲ満足スルコトカラ分ル。實ハ之以外ニ(2.2)ノ解ハナイ。[8] 而モ$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$ノトキハ，任意ノ解ハ唯一通リノ$w$デ(2.4)ノ形ニ表ハサレ，從ッテVektor空間(A^{00})ハ丁度g次元デアル。之等ノ事ハ次節デ証明スル。

偖元ニ戻ッテ與ヘラレタA^0カラ，(2.3)ノ如クA^{00}ヲ定義シタトキ，$A^S = A^0 (A^{00})^{-1}$即チ

(2.5) $\quad A^S: \quad A^S u_i = u_i, \quad A^S v_\alpha = v_\beta S^\beta_\alpha$

モ$\mathfrak{R}$ノAutom.デアル。

$$A^S(u_i \circ v_\alpha) = A^S u_i \circ A^S v_\alpha = u_i \circ A^S v_\alpha$$

ダカラA^Sハ$\mathfrak{v}$ニ對シテハ，$\mathfrak{r}$-Operatorautomorphismusデアル。即チ$S = [S^\beta_\alpha]$（β行α列）ト書ケバ

(2.6) $\quad D_i S = S D_i, \quad i = 1, \dots, r$

即チSハ表現$\mathfrak{D}$ノ總テノ行列ト可換デアル。

---

8) 此事ハ小生ノ談話「Lie algebra ニ関スルLeviノ定理」(本誌第204号)ノ最後ノ脚註14)ニ豫想トシテ書イテオイタガ實際Whitehead: Certain equations in the algebra of semi-simple infinitesimal group, Quart. J. of Math. 8 (1937) ヲ後カラ讀ンデ見タ所ガ，其ノ第二節ノ内容ハ正ニ此事デアッタ。

$\mathfrak{o}$ ハ完全可約デアルカラ，(2.6) ヲ満足スル S ノ全体ハ P ノ上ノ *halbeinfach* ナ *algebra* γ ヲナス。其ノ逆デアル元 S ヲ任意ニ取レバ，ソレカラ (2.5) ニ依ッテ定義シタ A^S ハ $\mathfrak{K}$ ノ *Autom.* デアル。故ニ *algebra* γ ノ逆ノアル元全体ノ乗法群ヲ (S) トセバ

(2.7) $(A^0)/(A^{00}) \cong (S)$

デアル。

γ ハ *Schiefkörper* ノ上ノ *Matrizenring* ノ幾ツカノ直和デアルカラ，(S) ハ *Schiefkörper* ノ上ノ *volle lineare Gruppe* ノ幾ツカノ直積デアル。(特ニ $\mathfrak{o}$ ガ既約ナラ γ ハ P ノ上ノ *Divisionsalgebra* デ，(S) ハソノ 0 以外ノ元ノ乗法群，$\mathfrak{o}$ ガ絶對既約ナラ γ = P デアル)

結局 *Autom.* A^0 ヲ，$u_1, \cdots\cdots, u_r; v_1, \cdots\cdots, v_g$ ヲ *Basis* トシテ行列トシテ書クト次ノ様ニナル。(2.3)，(2.5)，(2.5) ヨリ

$$(2.8) \quad A^{00} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ T & E_g \end{bmatrix}, \quad T = [t_1 \cdots\cdots t_r] = \begin{bmatrix} t_1^1 & \cdots\cdots & t_r^1 \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ t_1^g & \cdots\cdots & t_r^g \end{bmatrix}$$

$$A^S = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \text{一般ノ } A^0 \text{ ハ } A^0 = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ T & S \end{bmatrix}$$

(II) $\bar{A} \neq E$ ナル *Automorphismus*.

$(A)/(A^{00})$ ノ各 *Klasse* ノ代表 $\hat{A}$ ヲ $\hat{A}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ ナル様ニ取ルコトガ出来ル。

∵ 一般ニ autom. A ヲ取ッタトキ，$A\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^*$,
$AS = S^*$, $S \in \mathfrak{S}$ ニナッタトスル。$\mathfrak{R} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}$ デアル
カラ，$S^* \equiv S^\circ (\mathfrak{N})$ ナル $S^\circ \in \mathfrak{S}$ ガ唯一ツキマル。
$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}^* + \mathfrak{N}$ デモアルカラ，$S^* \to S^\circ$ ノ對應ハ一對
一，従ッテ S^* ヲ通ジテ S ト S° ノ對應モ一對一デアル。
若シ $S_1\alpha_1 + S_2\alpha_2 = S_3$ ($S_i \in \mathfrak{S}$) ナラ $S_1^*\alpha_1 + S_2^*\alpha_2$
$= S_3^*$ 従ッテ $S_1^\circ\alpha_1 + S_2^\circ\alpha_2 \equiv S_3^\circ(\mathfrak{N})$. 然ルニコノ合
同式ノ両辺共 $\mathfrak{S}$ ニ屬シ，而モ mod $\mathfrak{N}$ ノ代表ハ $\mathfrak{S}$ ノ
中デ一意的ダカラ $S_1^\circ\alpha_1 + S_2^\circ\alpha_2 = S_3^\circ$. 全ク同様ニ
$S_1 \circ S_2 = S_3$ ナラ $S_1^\circ \circ S_2^\circ = S_3^\circ$ デアル。従ッテ $S \to S^\circ$
ハ $\mathfrak{S}$ ノ autom. ヲナス。

(2.9) $\hat{A}$: $\hat{A}S = S^\circ$, $\hat{A}v = Av$, $S \in \mathfrak{S}$, $v \in \mathfrak{N}$
ト定義スレバ，$\hat{A}$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ autom. ニナル。$\mathfrak{S}$ ノ autom.
ニナルコトハ既ニ云ッタカラ，$\hat{A}(S \circ v) = \hat{A}S \circ \hat{A}v$ ヲ
云ヘバヨイ。$S \circ v \in \mathfrak{N}$, $S^* \equiv S^\circ(\mathfrak{N})$ ダカラ

$\hat{A}(S \circ v) = A(S \circ v) = AS \circ Av = S^* \circ Av = S^\circ \circ Av$
$= \hat{A}S \circ \hat{A}v$ 即チ $\hat{A}$ ハ autom.

ソコデ $A = A^{\circ\circ}\hat{A}$ トオケバ，$A^{\circ\circ}$ モ autom. デ $A^{\circ\circ}S^\circ$
$= S^* \equiv S^\circ(\mathfrak{N})$, $A^{\circ\circ}v = v$.

即チ A° ハ mod $\mathfrak{N}$ ノ Klasse ヲ変ヘズ，$\mathfrak{N}$ ヲ
elemweise ニ変ヘナイカラ $A^{\circ\circ} \in (A^{\circ\circ})$. ∴ 任意
ノ A ハ $\hat{A}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ ナル $\hat{A}$ ニ mod $(A^{\circ\circ})$ デ kongruent
デアル。q.e.d. ($(A^{\circ\circ})$ ハ Normalteiler デアル
カラ $A = \hat{A}A^{\circ\circ}$ ノ形ニモ書ケル)

故ニ $\hat{A}\mathfrak{S}=\mathfrak{S}$ ナル $\hat{A}$ ヲ考ヘヨウ。

$$(2.9)\quad \hat{A}:\ \hat{A}S=\bar{A}S=S^*,\ S\in\mathfrak{S};\ \hat{A}v_\alpha=v_\beta l^\beta_\alpha=v^*_\alpha$$

($\bar{A}$ ハ元來 $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ノ autom. デアルガ, 爰デハ $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}\longleftrightarrow\mathfrak{S}$ ノ對應ニヨリ $\mathfrak{S}$ ノ autom. トシテ考ヘテ居ル。)

$S\circ v_\alpha=v_\beta\alpha^\beta_\alpha$, $[\alpha^\beta_\alpha]=\vartheta(S)$ ナラ $S^*\circ v^*_\alpha=v^*_\beta\alpha^\beta_\alpha$ ニナル筈デアル。 $S^*\circ v^*_\alpha=S^*\circ v_\beta l^\beta_\alpha=v_\alpha\vartheta(S^*)^\gamma_\beta l^\beta_\alpha$, $v^*_\beta\alpha^\beta_\alpha=v_\alpha l^\gamma_\beta\alpha^\beta_\alpha$ ダカラ, $L=[l^\beta_\alpha]$ ト書ケバ

$$(2.10)\quad \vartheta(\bar{A}S)L=L\vartheta(S),\quad |L|\neq 0$$

(2.10) ガ L ニ就テ解ケル様ナ $\bar{A}$, 即チ $\vartheta^{\bar{A}}\sim\vartheta$ ナル $\bar{A}$ ハ $\mathfrak{S}$ ノ autom. ノ全体ノ中デ Untergruppe ヲナス. 夫ヲ $(\bar{A})$ トスル。解ケル場合ニハ L ハ表現ノスベテノ行列ト可換ナ行列 $S\in(S)$ ヲ除イテ一意的ニ決ル。即チ $L_{\bar{A}}$ ヲ一ツノ解トスレバ $(S)L_{\bar{A}}=L_{\bar{A}}(S)$ ガ総テノ解ヲアラハス。 mod (A^0) ノ代表 $\bar{A}$ ハ Matrix トシテ書イテ

$$(2.11)\quad \hat{A}=\begin{bmatrix}\bar{A} & 0\\ 0 & SL_{\bar{A}}\end{bmatrix}$$

結局, $\mathfrak{R}$ ノ一般ノ autom. A ハ Matrix トシテ書イテ ((2.8), (2.11) ヨリ)

$$(2.12)\quad A=A^0\circ\hat{A}=\begin{bmatrix}\bar{A} & 0\\ T\bar{A} & SL_{\bar{A}}\end{bmatrix}$$

コヽニ

a) $\bar{A}$ ハ $\vartheta^{\bar{A}}\sim\vartheta$ ナル如キ $\mathfrak{S}$ ノ autom

b) $S L_{\bar{A}}$ ハ $\mathfrak{d}(\bar{A}S) = L\mathfrak{d}(S)L^{-1}$ ヲ満足スル任意ノL.

c) $T = [t_1 \cdots\cdots t_r] = \begin{bmatrix} t_1^1 & \cdots\cdots & t_r^1 \\ & \cdots\cdots & \\ t_1^q & \cdots\cdots & t_r^q \end{bmatrix}$ ハ

$$D_i t_j - D_j t_i = t_k c_{ij}^k \text{ ノ解.}$$

c) ニ就イテハ次節デ, a) ニツイテハ第4節デ考ヘル。

〔定理〕2. $\mathfrak{R}$ ハ可換ナ Radikal ヲ有シ vollkommen ($\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$) ナ Lie 環トスル。

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{S}; \mathfrak{d})$$

$\mathfrak{R}$ ノ Automorphismen 全体ノ群(A) ノ中デ

(A°): mod $\mathfrak{r}$ ノ剰餘類ヲ変ヘナイ Automorphismen ノ作ル Normalteiler

(A°°): $\mathfrak{r}$ ノ元ヲ elementweise ニ変ヘナイ(A°) ノ Automorphismen ノ作ル Normalteiler

トスルト:

i) $(A)/(A^0) \cong (\bar{A}) = \mathfrak{d}^{\bar{A}} \sim \mathfrak{d}$ ナル $\mathfrak{S}$ ノ autom. $\bar{A}$ ノ群.

ii) $(A^0)/(A^{00}) \cong (S) =$ 表現 $\mathfrak{d}$ ト可換ナ Matrix ノ準單純環 $\mathfrak{r}$ ノ中, 逆ノアル元ノ乗法群 (Schiefkörper ノ上ノ volle lineare Gruppen ノ直積)

iii) $(A^{00}) \cong \mathfrak{r}$ ト同次元ノ Vektor 群。

3. 方程式 $D_i t_j - D_j t_i = t_k c_{ij}^k$

次ノ定理ハ Whitehead, l.c.（附註 8）参照）ニアル[9]：

定理［3.1］ $\mathfrak{g}=(u_1,\cdots\cdots,u_r)$ ガ準単純 Lie 環デ，$\mathfrak{d}$：$u_i \longrightarrow D_i$ ガ其ノ g 次ノ表現ナルトキ，g 次元ノ vectors，$t_1,\cdots\cdots,t_r$ ニ関スル一次方程式

$$(3.1)\quad D_i t_j - D_j t_i = t_k c^k_{ij},\quad 1 \leqq i < j \leqq r$$

ノ総テノ解ハ

$$(3.2)\quad t_i = D_i w,\qquad 1 \leqq i \leqq r$$

デ與ヘラレル。ココニ w ハ任意ノ g 次元 Vektor デアル。

〔証明〕 先ヅ（3.2）ノ解デアルコトハ $D_iD_j - D_jD_i = D_k c^k_{ij}$ ヲ左カラ Vektor w ニ作用サセテ見レバ明カデアル。 次ニ t ガ（3.1）ヲ満足スルトスル．
$D^i = g^{il}D_l$ （$g_{il} = c^k_{ij}c^j_{lk}$，$g^{il}$ ハソノ逆行列）ヲ左カラ（3.1）ニ書ケルト $D^iD_i = C$ ハ表現 $\mathfrak{d}$ ノ 所謂「Casimir 行列」デアッテ

$$\begin{aligned}
Ct_j &= D^iD_jt_i + c^k_{ij}D^it_k \\
&= (D_jD^i + c_{k\cdot j}^{\cdot i}D^k)t_i + c^{\cdot i}_{\cdot kj}D^kt_i \\
&= D_jD^it_i + (c_{k\cdot j}^{\cdot i} + c^{\cdot i}_{\cdot kj})D^kt_i = D_jD^it_i
\end{aligned}$$

故ニ若シ $|C| \neq 0$ ナラ，C 従ッテ C^{-1} ハ表現ノ Matrix ト可換ダカラ

$$(3.3)\quad t_j = C^{-1}D_jD^it_i = D_j(C^{-1}D^it_i)$$

9) Whitehead ハ「w ニ関スル方程式(3.2)ガ解ケル為ニハ，(3.1)ナル條件ガ必要且十分デアル」トイフ形デ述ベテ居ル．内容ハ同ジデアル。

即チ $t_j = D_j w$ ノ形ニナッテ居ル. ϑ が零表現以外ノ既約表現ナルトキハ $C = cE_g$, $C \neq 0$ ノ形ニナルカラ, ϑ が零表現ヲ既約成分トシテ含マナケレバ $|C| \neq 0$ デ従ッテ定理ハ成立ツ。又 ϑ が零表現ノトキハ, (3.1) ハ $t_k c^k_{ij} = 0$ トナリ之ハ $t_k = 0$, $k = 1, \cdots\cdots, r$ 以外ニ解ヲ持タナイ。(夫レハ例ヘバ次ノ様ニシテ分ル: $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ ダカラ任意ノ u_l ハ $u_i \circ u_j = u_k c^k_{ij}$ ノ一次結合トシテ表ハセル。即チ

$$u_l = u_k c^k_{ij} a^{ij}_l \quad \text{或ハ} \quad \delta^k_l = c^k_{ij} a^{ij}_l$$

ナル a^{ij}_l がアル。t_k ニ掛ケテ k デ加ヘ, $t_l = t_k c^k_{ij} a^{ij}_l$. 従ッテ $t_k c^k_{ij} = 0$ ナラ $t_l = 0$ デアル) 即チ此ノ場合モ (3.2) ノ形ノ解シカナイ。一般ノ場合ハ, ϑ が完全可約ナコトヲ使ッテ, ϑ ヲ零表現 ϑ_1 ト, 零表現ヲ含マヌ表現 ϑ_2 ノ和ニ分ケ, 共レニ相應シテ Vektor t_i モ二ツノ Vektor ニ分ケレバ, (3.1)ハ夫々ノ表現ニ就イテノ式ニ分レ, 従ッテ定理ノ証明ハ上ノ二ツノ場合ニ帰スル。 q. e. d.

[注意] Whitehead ハ完全可約性ヲ假定シナイデ直接コノ定理ヲ証明シ, コノ定理ヲ使ッテ完全可約性ヲ証明シテ居ル。Brauer ノ証明ト違ッテ (此処カラ先デハ) 既約表現ト可換ナ行列が λE ノ形ニナルト云フ事実ヲ使ハナイカラ, 基礎体ニ関係シナイ点が氣持がヨイ。即チ「零デナイ既約表現ノ Casimir 行列ハ逆がアル」ト云

ノ事実ダケカラ，後ハ全然基礎体カラ外ニ出ル事ナシニ，完全可約性ガ証明サレル。

勿論代数的閉体ノ場合ノ完全可約性カラ一般ノ場合ハ容易ニ出ルカラ，Braner ノ証明モ一般性ヲ欠ク訳デハナイ。茲デハ（標数 0 ノ基礎 P ノ上ノ準単純 Lie 環ノ P ニ於ケル表現ノ）完全可約性ハ（例ヘバ Braner ノ証明ニ依テ）既ニ知ラレテ居ルモノトシタ。

既ニ述ベタ様ニ $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(\mathfrak{G};\vartheta)$ ノ autom. ヲ考ヘル上ニハ，$\mathfrak{K}'=\mathfrak{K}$ ノ場合ヲ考ヘレバ十分デアッタ。ϑ ハ零表現ヲ含マズ、従ツテ其ノ Casimir 行列 $C=g^{ij}D_iD_j$ ハ逆ヲ持ツ。此ノトキ (3.1) ノ解 $t_i=D_iw$，w ハ一意的デアル。

$$\because\quad t_j=D_jw=D_jw' \text{ナラ } D_j(w-w')=0,$$
$$j=1,\cdots\cdots,r.$$
$$\therefore\quad C(w-w')=g^{ij}D_iD_j(w-w')=0$$

C ハ逆ガアルカラ之レヨリ

$$w-w'=0 \qquad q.e.d.$$

従ツテ

定理〔3.2〕 ϑ ガ零表現ヲ含マナイナラ

$$(3.1)\qquad D_it_j-D_jt_i=D_kc^k_{ij}$$

ノ任意ノ解ハ $t_i=D_iw$ ノ形ニ唯一通リニ表ハセル。故ニ (3.1) ノ独立ナ解ハ丁度ノ表現 ϑ ノ次数ダケアル。

本節ノ定理ハ第二節デ証明ナシニ使ッタ。